

**КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Б.Н. ЕЛЬЦИНА**

На правах рукописи

УДК 517.97; (575.2) (04); 62-50

**КАРАБАКИРОВ КУБАТ РЫМБЕКОВИЧ**

**ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ**

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель**  
**доктор физико-математических наук,**  
**профессор Керимбеков Акылбек**

**Бишкек - 2015**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ МАТЕРИАЛА.....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА I. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ .....	25
ГЛАВА II. ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА .....	34
2.1. Решение задачи оптимизации при подвижном точечном управлении .....	34
2.2. Решение задачи оптимизации при наличии нескольких подвижных точечных управлений .....	47
2.3. Пример.....	61
ГЛАВА III. ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО–ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА .....	74
3.1. Решение задачи оптимизации при подвижном точечном управлении .....	74
3.2. Решение задачи оптимизации при наличии нескольких подвижных точечных управлений .....	91
ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ .....	105
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	106
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	116

**УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИ  
ИЗЛОЖЕНИИ МАТЕРИАЛА**

1.  $(a, b)$  – интервал действительной числовой оси  $R$ ;
2.  $[c, d]$  – отрезок действительной числовой оси  $R$ ;
3.  $Q = (a, b) \times (c, d)$  – область плоскости  $R \times R$ ;
4.  $\delta(x - x_0)$  – дельта-функция Дирака;
5.  $\delta_{nk}$  – символ Кронекера-Капелли;
6.  $V_t(t, x)$  – частная производная первого порядка функции  $V(t, x)$  по временной переменной  $t$ ;
7.  $V_{xx}(t, x)$  – частная производная второго порядка функции  $V(t, x)$  по координатной переменной  $x$ ;
8.  $S^{(n)}(t)$  – производная  $n$ -го порядка функции  $S(t)$ ;
9.  $|\cdot|$  – знак абсолютной величины;
10.  $\|\cdot\|_X$  – норма элемента функционального пространства  $X$ ;
11.  $H(a, b)$  – гильбертово пространство функций, определенных в интервале  $(a, b)$ ;
12.  $H(Q)$  – гильбертово пространство функций, определенных в области  $Q$ ;
13.  $H^m$  – декартово произведение  $m$ - пространств  $H$ ;
14.  $C^{1,2}(Q)$  – пространство непрерывных функций  $V(t, x)$ , определенных в области  $Q$  и имеющих производную первого порядка по переменной  $t$  и производную второго порядка по переменной  $x$ ;
15.  $f^{-1}(t)$  – функция обратная по отношению к функции  $f(t)$ ;
16.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в пространстве  $H$ .
17.  $sign x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы диссертации.** Колебательные системы часто встречаются в природе, и особенно в технике, в различных машинах, устройствах и механизмах, во многих современных технологических процессах. В настоящее время все большее развитие получают управляемые колебательные системы. В некоторых таких системах, например, требуется погасить возникающие нежелательные колебательные процессы, или наоборот сгенерировать колебания определенных частот. В отличие от задач с граничными управлениями, когда управляющие воздействия осуществляются на границах объекта, а также задач с фиксированными точечными управлениями, когда действия функций внешних воздействий сосредоточены в некоторых неподвижных точках системы, задачи подвижного управления колебательными процессами остаются пока мало изученными.

К настоящему моменту, сравнительно хорошо изучены линейные модели оптимального управления, когда функции управляющих воздействий линейно зависят от управлений, и методы их решений, в частности для оптимизации процессов теплофизики, теории упругости и др., достаточно хорошо известны. Однако для более корректного описания многих задач оптимизации, для совершенствования различных технологических процессов необходимо исследовать математические модели нелинейных оптимальных процессов. На сегодняшний день, несмотря на практическую востребованность, можно указать лишь небольшое число исследований, посвященных задачам оптимизации с подвижным управлением, где управление входит нелинейно в функцию внешнего воздействия. В частности, мало работ, посвященных задачам нелинейной оптимизации колебательных процессов при подвижных точечных управлениях. Методы решений таких задач еще недостаточно разработаны.

В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, происходящих под действием нескольких точечных

подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления. Исследование разрешимости подобных классов нелинейных задач оптимального управления и разработка конструктивных методов их решений являются одними из актуальных проблем теории оптимального управления распределенными системами.

**Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями.** Диссертация выполнена в рамках научно-исследовательской темы «Аналитические, топологические и численные методы исследования операторных уравнений и методы оптимизации» кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

**Цели и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии точечных подвижных источников и установление необходимых и достаточных условий существования и единственности решения задачи оптимизации, когда функции воздействия внешних источников нелинейно зависят от управления. Поставлены и решены для данных классов нелинейных моделей следующие задачи:

- построить слабообобщенные решения краевых задач управляемых колебательных процессов с нелинейными функциями воздействий внешних подвижных источников и исследовать сходимость их приближений;
- освободиться от решений сопряженных краевых задач в условиях оптимальности;
- исследовать разрешимость нелинейных интегральных уравнений относительно управлений;
- получить решения задач нелинейной оптимизации и исследовать сходимость их приближений;

**Научная новизна полученных результатов.**

- доказана сходимость приближений по резольвенте слабо обобщенных решений краевых задач для волнового уравнения с нелинейными функциями воздействия внешних подвижных источников;
- доказана сходимость приближенных решений соответствующих оптимизационных задач;
- разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодно точности задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов с подвижным точечным управлением.

### **Практическая значимость полученных результатов.**

Результаты, полученные в диссертации, являются практически значимыми в теории нелинейного оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями в частных производных. Конструктивный метод решения задач нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии подвижных точечных управлений, разработанный в данной диссертации применим для широкого спектра прикладных задач, связанных с управлением колебательными процессами.

Полученные результаты также имеют важное теоретическое значение для развития новых качественных и конструктивных методов исследований и построения решений задач нелинейной оптимизации процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

### **Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

- Получение слабо обобщенных решений краевых задач управляемых колебательных процессов с разрывным по временному аргументу коэффициентом в уравнении, когда функции воздействия внешних подвижных источников нелинейно зависят от управления;
- Сходимость по резольвенте приближений полученных слабо обобщенных решений краевых задач;
- Преобразования, приводящие условия оптимальности к виду, не содержащему решение соответствующей сопряженной краевой задачи;

– Установление сходимости приближенных решений нелинейных задач оптимизации колебательных процессов с подвижными точечными управлениями по управлению, оптимальному процессу и по функционалу;

– Численный пример, подтверждающий полученные теоретические заключения.

**Личный вклад соискателя.** По результатам исследований опубликованы 7 статей, 3 тезиса. В опубликованных работах в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: получение слабообобщенного решения, условий оптимальности, достаточных условий разрешимости нелинейных интегральных уравнений, построение алгоритма для получения приближенного и точного решений нелинейной оптимизационной задачи и доказательство сходимости приближенных решений задач нелинейной оптимизации, были получены соискателем.

**Апробации результатов диссертации.** Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

– IV Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», г. Бишкек – с. Бостери, 13–16 сентября 2011 г.

– Международная научно-практическая конференция «Информационные и инновационные технологии в образовании: состояние, проблемы и перспективы», г. Бишкек, КГУСТА им Н.Исанова, сентябрь 2012 г.

– Международная научная конференция «Функциональный анализ и его приложения», г. Астана, октябрь 2012 г.

– II Международная научная конференция, посвященная 20-летию образования КРСУ им Б.Н. Ельцина «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», «Иссык-Куль Аврора», 5–7 сентября 2013 г.

– III Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы физико-математических наук и технологии их обучения», г. Бишкек, КГУ им. И.Арабаева, май 2014 г.

– V Конгресс математиков тюркского мира, «Иссык-Куль Аврора», 5–7 июня 2014 г.

А также регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.) кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных статьях, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 6, в реферируемых зарубежных журналах – 1, в материалах конференций – 3, в единоличном авторстве – 3; и в 3 тезисах, в том числе в материалах конференций – 3. По материалам первой главы опубликованы 3 статьи и 1 тезис, а по материалам второй главы опубликованы 4 статьи и 2 тезиса.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 89 наименований, 9 таблиц, 3 рисунков и приложения. Общий объем работы содержит 134 страницы машинописного текста.

**Содержание исследований.** Материалы исследований опубликованы в работах [30–34, 41–45] и изложены в следующей последовательности.

В первом разделе второй главы исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления упругими колебаниями системы в случае, когда точка приложения внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления, меняется по заданному закону, т.е. является подвижной.

Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала

$$J[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи, описываемой уравнением



$$V_{tt} = V_{xx} + \delta[x - x_0(t)]f[t, u(t)], \quad (t, x) \in Q, \quad (2)$$

и удовлетворяющей на границе области  $Q$  – начальным

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (4)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $x_0$  – точка приложения функции внешнего воздействия  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ , является функцией от времени  $t \in [0, T]$  и удовлетворяет ограничению

$$0 \leq x_0(t) \leq 1;$$

функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$  и удовлетворяет условию монотонности, т.е.

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \equiv f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (5)$$

$\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$  – функции начального состояния системы;  $H$  – пространство Гильберта; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Получено, что слабо обобщенным решением краевой задачи (2)-(4) является функция

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \quad (6)$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$\begin{aligned} 2\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] &= \omega[t, x_0(t)], \\ f_u[t, u(t)] (u(t) f_u^{-1}[t, u(t)])_u &> 0, \end{aligned} \quad (7)$$

Установлено, что в случае минимизации интегрального квадратичного функционала оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n \quad (8)$$

и дополнительному условию в виде дифференциального неравенства (7).

Далее исследованы, согласно методике проф. Керимбекова, вопросы однозначной разрешимости интегрального уравнения (8), приведенного к операторной форме

$$p = G[p], \quad (9)$$

$$\text{где } G[p] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right].$$

**Лемма 2.1.2.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Лемма 2.1.3.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad (10)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H. \quad (11)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2T \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1 \quad (12)$$

оператор  $G[\cdot]$  является сжимающим.

**Теорема 2.1.1.** При выполнении условий (5), (10)–(12) операторное уравнение (9) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (9) может быть найдено методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\|p^0(t) - p_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (13)$$

где  $p_0(t) \in H(0, T)$  – произвольный элемент.

По найденному  $p^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$  находим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \quad (14)$$

Отсюда, согласно (6) получаем выражение для оптимального процесса

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x)$$

и вычисляем минимальное значение функционала

$$J[u^0] = \int_0^1 [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt.$$

Таким образом, найденная тройка  $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$  определяет решение нелинейной задачи оптимизации.

Для построения приближенного оптимального управления найдено приближенное решение  $p_k(t)$  операторного уравнения (9), удовлетворяющее оценке (13). Подставляя найденное  $p_k(t)$  в (14) получаем  $k$ -е приближение оптимального управления:

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta],$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (15)$$

По найденному  $u^k(t)$ , согласно (6), находим  $k$ -е приближение оптимального процесса

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \right]$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n [x_0(\tau)] f[\tau, u_k(\tau)] d\tau \Big] z_n(x),$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq T \left[ 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (16)$$

После определения  $u_k(t)$  и  $V_k(t, x)$ , согласно (1), вычисляется  $k$ -е приближение минимального значения функционала

$$J[u_k] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0,$$

которое удовлетворяет оценке

$$|J[u^0] - J[u_k]| \leq \left[ C_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta C_2 \right] \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (17)$$

где

$$C_1 = \|V^0(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x)\|_{H(0,1)}, \quad C_2 = \|u^0(t) + u_k(t)\|_{H(0,T)}.$$

Из оценок (15)-(25) приближенное решение  $(u_k(t), V_k(t, x), J[u_k])$  задачи нелинейной оптимизации сходится при  $k \rightarrow \infty$  к точному решению  $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$ .

Во втором разделе второй главы исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления колебаниями системы конечной длины в случае, когда колебательный процесс происходит под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления.

Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0 \quad (18)$$

на множестве решений краевой задачи, описываемой уравнением

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (19)$$

удовлетворяющим начальным

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (20)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (21)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $\mu_k$  – точки приложения внешних воздействий  $f_k[u_k(t)] \in H(0, T)$ , каждая из которых нелинейно зависит от функции  $u_k(t) \in H(0, T)$ , изменяются по заданному закону  $\mu_k = \mu_k(t)$ ,  $0 < \mu_k(t) < 1$ ;  $\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции начального состояния системы;  $H$  – пространство Гильберта; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Доказано, что краевая задача (19)–(21) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (22)$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$2\beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} = \omega[t, \mu_k(t)], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$\frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( u_k(t) / \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right) > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (23)$$

Установлено, что при минимизации интегрального квадратичного функционала векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i[u_i(\tau)] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (24)$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (23).

Вводя обозначения

$$\beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k(t)} \right)^{-1} = p_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

где функция  $u_k(t)$ , в силу (31), определяется однозначно:

$$u_k(t) = \varphi_k[t, p_k(t), \beta], \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (25)$$

систему (33) представим в виде

$$\begin{aligned} p_k(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i[\tau, \varphi_i[\tau, p_i(\tau), \beta]] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned}$$

или с учетом обозначений

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \dots \\ p_m(t) \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \dots \\ h_m(t) \end{pmatrix}, \quad G[p] = \begin{pmatrix} G[p_1] \\ \dots \\ G[p_m] \end{pmatrix}, \quad \bar{G}[p] = h(t) - G[p], \quad \text{где}$$

$$h_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n,$$

$$G[p_k] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i(\tau, \varphi_i[\tau, p_i(\tau), \beta]) d\tau,$$

представим систему (24) в операторной форме

$$p = \bar{G}[p] \quad (26)$$

**Лемма 2.2.2.**  $h = h(t)$  является элементом пространства  $H^m(0, T)$ .

**Лемма 2.2.3.** Оператор  $\bar{G}[\cdot]$  отображает пространство  $H^m$  в себя.

**Лемма 2.2.4.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, \bar{u}(t)] - f[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^m} \leq f_0 \|\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)\|_H, \quad f_0 > 0,$$

$$\|\varphi[t, \bar{p}(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}(t) - \tilde{p}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор  $\bar{G}[\cdot]$  является сжимающим.

**Теорема 2.2.1.** Операторное уравнение (26) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам

$$\bar{p}^{-n}(t) = G \left[ \bar{p}^{-n-1}(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (27)$$

где  $\bar{p}^{-0}(t) = (p_1^0(t), \dots, p_m^0(t))$  – произвольный элемент пространства  $H^m(0, T)$ .

Точное решение  $\bar{p}^{-0}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^{-n}(t)$  и удовлетворяет оценке

$$\|\bar{p}^{-0}(t) - \bar{p}^{-n}(t)\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \left\| \bar{G} \left[ \bar{p}^{-0}(t) \right] - p^0(t) \right\|_{H^m},$$

где

$$\gamma = 2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1.$$

Далее, последовательны найдены оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[t, p_1(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_m(t), \beta] \end{pmatrix}, \quad (28)$$

оптимальный процесс  $V(t, x)$

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n(\mu_i(\tau)) f_i[\tau, u_i(\tau)] d\tau \right) z_n(x), \quad (29)$$

и минимальное значение функционала  $J[\bar{u}(t)]$

$$J[\bar{u}(t)] = \int_0^1 [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m \bar{u}_k^2(t) dt. \quad (30)$$

Найдены соответствующие приближенные решения и доказана их сходимость к точным.

В разделе 3 полученные результаты проиллюстрированы на модельном примере.

В первом разделе третьей главы рассматривается задача минимизации кусочно-линейного функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^1 |u(t)| dt,$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_u = V_{xx} + a(t)V + g(t, x)\delta(x - x_0)f[t, u(t)], \quad (31)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad (32)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad t \in (0, T); \quad (33)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $x_0$  – точка приложения функции внешнего воздействия  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ , которая является функцией от времени  $t \in [0, T]$  и удовлетворяет ограничению

$$0 \leq x_0(t) \leq 1;$$

$a(t) \in H(0, T)$ ,  $g(t, x) \in C(\bar{Q})$ ,  $\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$ ,  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции;  $f[t, u(t)]$  – функция внешнего воздействия, нелинейно



зависящая от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$  и являющаяся монотонной по функциональному аргументу  $u(t)$ , т.е.

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \equiv f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

$H(Y)$  – гильбертово пространство функций, определенных на множестве  $Y$ ;  
 $T$  – фиксированный момент времени.

Построено слабо обобщенное решение краевой задачи (31)-(33):

$$V(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t a(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^{\tau} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

где коэффициенты Фурье  $V_n(t)$ , при каждом фиксированном  $n = 0, 1, 2, \dots$ , определяются как решения интегрального уравнения

$$V_n(t) \equiv \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t a(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^{\tau} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau.$$

Получено решение краевой задачи (31)-(33) в виде:

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x),$$

где

$$a_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau,$$

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_s^t K_n(t, \tau) K_{n,i}(\tau, s) d\tau, \quad K_n(t, s) = K_{n,1}(t, s)$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) \cdot f_u(t, u(t)) - 2\beta \text{sign } u(t) = 0,$$

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) \cdot f_{uu}(t, u(t)) < 0,$$

Установлено, что в случае минимизации интегрального кусочно-линейного функционала оптимальное управление удовлетворяет следующим нелинейным интегральным уравнениям и дополнительным дифференциальным неравенствам:

если  $u(t) \geq 0$ , то

$$\begin{cases} \frac{\beta}{f_u[t, u(t)]} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( -h_n + \int_0^T B_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right) = 0, \\ f_u\left(\frac{1}{f_u}\right)_u > 0; \end{cases} \quad (34)$$

если  $u(t) \leq 0$ , то

$$\begin{cases} \frac{\beta}{f_u[t, u(t)]} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( -h_n + \int_0^T B_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right) = 0, \\ f_u\left(\frac{1}{f_u}\right)_u < 0; \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n(t) &= g(t, x_0) z_n(x_0) \frac{1}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n(T-t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_t^T P_n(s, t, \lambda) \sin \lambda_n(T-s) ds \right]; \\ B_n(\tau) &= g(\tau, x_0) z_n(x_0) \frac{1}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n(T-\tau) + \frac{1}{\lambda_n} \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n(s-\tau) ds \right]; \\ h_n &= \xi_n - \psi_{1n} \left[ \cos \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right] - \\ &\quad - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right], \end{aligned}$$

Далее для случая, когда  $u(t) > 0, \forall t \in [0, T]$ , исследованы вопросы однозначной разрешимости соответствующего интегрального уравнения (34), представленного в операторной форме

$$p(t) = G[p(t)], \quad (36)$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( h_n - \int_0^T B_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right).$$

**Лемма 3.1.1.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Лемма 3.1.2.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad (37)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H \quad (38)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = Cf_0\varphi_0(\beta) < 1,$$

$$\text{где } C = 4 \int_0^T g^2(t, x_0) dt \cdot \left( 1 + \frac{T^2 a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right), \text{ оператор } G[\cdot] \text{ является}$$

сжимающим.

**Теорема 3.1.1.** При выполнении условий (37), (38) операторное уравнение (36) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (36) найдено методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\|\tilde{p}(t) - p_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H,$$

где  $p_0(t) \in H(0, T)$  – произвольный элемент.

Далее, последовательны найдены оптимальное управление

$$\tilde{u}(t) = \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta].$$

оптимальный процесс  $\tilde{V}(t, x)$

$$\tilde{V}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \tilde{a}_n(s) ds + \tilde{a}_n(t) \right) z_n(x),$$

где  $\tilde{a}_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, \tilde{u}(\tau)] d\tau,$

и минимальное значение функционала  $J[\tilde{u}(t)]$

$$J[\tilde{u}(t)] = \int_0^1 [\tilde{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |\tilde{u}(t)| dt.$$

Найдены соответствующие приближенные решения и доказана их сходимость к точным.

Во втором разделе третьей главы рассматривается задача нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt, \quad \beta > 0, \quad (39)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (40)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (41)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (42)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $\mu_k$  – точки приложений внешних воздействий  $f_k[u_k(t)] \in H(0, T)$ , каждая из которых нелинейно зависит от функции  $u_k(t) \in H(0, T)$  и изменяются по заданному закону  $\mu_k = \mu_k(t)$ ,  $0 < \mu_k(t) < 1$ ;  $\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции начального состояния системы;  $H$  – пространство Гильберта; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Доказано, что краевая задача (40)–(42) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \right.$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n [\mu_k(\tau)] f_k [u_k(\tau)] d\tau \Big] z_n(x), \quad (43)$$

**Лемма 3.2.1.**  $V(t, x)$  является элементом пространства  $H(Q)$ .

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$2\beta \left( \frac{\partial f_k [u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k = \omega [t, \mu_k(t)], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$\frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left( \frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \right) \text{sign } u_k(t) > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (44)$$

Установлено, что при минимизации интегрального кусочно-линейного функционала векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений

$$\beta \left( \frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n [\tau, \mu_i(\tau)] f_i [u_i(\tau)] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (45)$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (44).

Далее для определенности изложено исследование для набора вида

$$\{u_1^+(t), \dots, u_s^+(t), u_{s+1}^-(t), \dots, u_m^-(t)\}, \quad 1 \leq s \leq m.$$

В этом случае система (45) приводится к виду

$$\beta \left( \frac{\partial f_i [t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n [\tau, \mu_k(\tau)] f_k [\tau, u_k(\tau)] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = 1, \dots, s; \quad (46)$$

$$-\beta \left( \frac{\partial f_i [t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n [\tau, \mu_k(\tau)] f_k [\tau, u_k(\tau)] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = s+1, \dots, m, \quad (47)$$

а система условий (44) переходит к следующей системе условий

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left[ \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \right]^{-1} \right) > 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad (48)$$

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left[ \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \right]^{-1} \right) < 0, \quad k = s+1, \dots, m. \quad (49)$$

Вводя обозначения

$$\beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^+(t), \quad i = 1, \dots, s, \quad (50)$$

$$-\beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^-(t), \quad i = s+1, \dots, m. \quad (51)$$

где функция  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , в силу (48) определяется однозначно, т.е. имеют место равенства

$$u_i^+(t) = \varphi_i^+[t, p_i^+(t), \beta], \quad i = 1, \dots, s. \quad (52)$$

Согласно (49) из (51) аналогичным образом найдены функции

$$u_i^-(t) = \varphi_i^-[t, p_i^-(t), \beta], \quad i = s+1, \dots, m. \quad (53)$$

С учетом (50)-(53) систему (46),(47) представим в операторной форме

$$p = \bar{G}[p], \quad (54)$$

где

$$G[\bar{p}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \bar{\mu}(t)] \left[ h_n - \int_0^T G_n^*(\tau, \bar{\mu}(\tau)) f[\tau, \bar{\varphi}(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)] d\tau \right],$$

$$\bar{p}(t) = \{p^+(t), p^-(t)\} = \{p_1^+(t), \dots, p_s^+(t), p_{s+1}^-(t), \dots, p_m^-(t)\},$$

$$G[\bar{p}] = \{G_1[p_1], \dots, G_m[p_m]\},$$

$$G_n[t, \bar{\mu}(t)] = \{G_n[t, \mu^+(t)], G_n[t, \mu^-(t)]\} =$$

$$= \{G_n[t, \mu_1(t)], \dots, G_n[t, \mu_s(t)], G_n[t, \mu_{s+1}(t)], \dots, G_n[t, \mu_m(t)]\},$$

$$\begin{aligned} \bar{f}[t, \bar{\varphi}(t, \bar{p}(t), \beta)] &= \left\{ \bar{f}[t, \varphi^+(t, p^+(t), \beta)], \bar{f}[t, \varphi^-(t, p^-(t), \beta)] \right\} = \\ &= \begin{cases} f_1[t, \varphi_1^+(t, p_1^+(t), \beta)], \dots, f_s[t, \varphi_s^+(t, p_s^+(t), \beta)], \\ f_{s+1}[t, \varphi_{s+1}^-(t, p_{s+1}^-(t), \beta)], \dots, f_m[t, \varphi_m^-(t, p_m^-(t), \beta)] \end{cases} \end{aligned}$$

\* – знак транспонирования.

**Лемма 3.2.2.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Лемма 3.2.3.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, \bar{u}(t)] - f[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^m} \leq f_0 \|\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)\|_H, \quad f_0 > 0$$

$$\|\varphi[t, \bar{p}(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}(t) - \tilde{p}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор  $G[\cdot]$  является сжимающим.

**Теорема 3.2.1.** Операторное уравнение (54) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Это решение найдено методом последовательных приближений по формулам

$$\bar{p}^n(t) = G[\bar{p}^{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (55)$$

где  $\bar{p}^0(t) = (p_1^0(t), \dots, p_m^0(t))$  – произвольный элемент пространства  $H^m(0, T)$ .

Точное решение  $\bar{p}_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^n(t)$  и удовлетворяет оценке

$$\|\bar{p}_0(t) - \bar{p}^n(t)\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \left\| \bar{G}[\bar{p}^0(t)] - p^0(t) \right\|_{H^m},$$

где

$$\gamma = 2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1.$$

Далее, последовательно найдены оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1^+(t) \\ \dots \\ u_s^+(t) \\ u_{s+1}^-(t) \\ \dots \\ u_m^-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[t, p_1(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_s(t), \beta] \\ \varphi[t, p_{s+1}(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_m(t), \beta] \end{pmatrix}, \quad (56)$$

оптимальный процесс

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n(\mu_i(\tau) f_i[\tau, u_i(\tau)] d\tau \right) z_n(x), \quad (57)$$

и минимальное значение функционала.

$$J[\bar{u}(t)] = \int_0^1 [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |\bar{u}_k(t)| dt. \quad (58)$$

Найдены соответствующие приближенные решения и доказана их сходимость к точным.

В приложении приведен вариант исполнения программного комплекса в среде MATLAB, соответствующего модельному примеру и результатам численных расчетов, подтверждающим теоретические выводы.



## ГЛАВА I. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Теория управления, как самостоятельное направление математической науки, сформировалось к середине прошлого века. У истоков оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями в частных производных, стояли такие ученые, как А.Г. Бутковский, А.И. Егоров, Т.К. Сиразетдинов и др. Теория получила дальнейшее развитие в работах А.Г. Бутковского [10]-[15], А.И. Егорова [20]-[25], Т.К. Сиразетдинова [79], К.А. Лурье [73], В.И. Плотникова [75], Ж.-Л. Лионса [72], их учеников и последователей.

Постановка задач оптимального управления для волнового уравнения впервые была рассмотрена А.Г. Бутковским [10]. Первые результаты были подытожены в работе [15]. Приведем некоторые примеры систем с подвижным управлением различной физической природы, описываемыми различными уравнениями гиперболического типа.

В автоматических системах управления работой гидротурбинных установок необходимо регулировать скорость вращения колеса турбины так, чтобы при сбросе нагрузки минимизировать приращение кинетической энергии ротора турбины при заданном предельном значении давления в трубопроводе. Приращение кинетической энергии ротора во время переходного процесса, происходящего после сброса нагрузки, можно выразить формулой

$$J = \int_0^T [Q_1(L, t)]^{3/2} Q_2(L, t) dt, \quad (1.1.1)$$

где функции  $Q_1(y, t)$  и  $Q_2(y, t)$ ,  $0 \leq y \leq L$ ,  $0 \leq t \leq T$ , описывают соответственно распределение давления и скорости движущейся жидкой среды в подводящем трубопроводе длины  $L$ . Управляющая функция  $u(t)$  имеет смысл скорости движения жидкости, которая регулируется с помощью заслонки, находящейся непосредственно перед ротором турбины. Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить управление  $u(t)$ ,  $A_1 \leq u(t) \leq A_2$ , минимизирующее функционал (1.1.1) при условии, что давление в подводящем трубопроводе не должно превышать определенного значения  $A_3$ , т.е.  $Q_1(y, t) \leq A_3$ .

Необходимость учета колебательных процессов механизмов буровых установок при бурении скважин, связанных с упругостью передающего вала турбобура приводит к задаче оптимального выбора скорости вращения вала и осевого усилия на него для достижения наибольшей скорости бурения. При этом, конечно, накладываются определенные ограничения, связанные, например, с прочностью металлических конструкций.

В системах, генерирующих и излучающих сверхвысокочастотные волны возникает вопрос о разработке эффективного способа генерации электромагнитной энергии в направленных волноводах и осуществление излучения этой энергии для получения строго определенных результатов. В настоящее время исследование таких задач является одним из актуальных и интересных направлений оптимального управления волнами сверхвысоких частот.

При автоматическом управлении газокompрессорными установками учитывается распределенность регулируемых параметров в трубопроводе. Задача оптимизации состоит в том, чтобы создать такой оптимальный режим работы газокompрессорных установок, чтобы минимизировать колебания давления на стороне потребителя. Управляющим воздействием  $u(t)$  здесь является давление, поддерживаемое в начале газопровода. В этом случае требуется определить управляющую функцию  $u(t)$ ,  $A_1 \leq u(t) \leq A_2$ , доставляющую минимум функционалу

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - Q_1(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1. \quad (1.1.2)$$

В этой работе рассматривается еще одна из важнейших задач автоматического управления процессом вытягивания волокон в ткацком деле. Управляемый процесс описывается так называемой кривой утонения  $Q(x, t)$ , характеризующей число волокон в каждой точке  $x$  вытяжного поля в определенный момент времени  $t$ . Задача оптимального управления этим процессом состоит в том, чтобы при заданной производительности, определить

такой режим выбора скоростей вытягивания волокон, чтобы доставить минимум функционалу отклонения числа волокон в поперечном сечении на выходе при  $x = L$  от заданного значения  $Q^*$

$$J = \int_0^T |Q^* - Q(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (1.1.3)$$

где  $T$  – фиксированный момент времени.

В работах [68]-[70] рассматриваются управляемые колебательные системы, в которых управляющими воздействиями являются как распределенные, так и подвижные непрерывные и импульсные воздействия, удовлетворяющие определенным ограничениям. Разработаны алгоритмы оптимального управления, позволяющие уменьшить амплитуду колебаний системы или наоборот увеличивать ее. Также приводятся практические примеры подвижных источников воздействия, такие, как электронный, лазерный и ионный лучи, поток нагретого газа или плазмы, электрическая дуга, индукционный электрический ток, возбуждаемый движущимся индуктором. Указывается, что подвижными могут быть также источники вещества в процессах диффузии, электрически заряженные тела, механическое силовое воздействие, движущиеся излучатели электромагнитных или акустических колебаний и многое другое.

Близко к проблемам управления подвижными источниками воздействия примыкают проблемы автоматического сканирования, т.е. получения и обработки информации о состоянии объектов различной физической природы с помощью сканирующих (подвижных) датчиков.

В работе [68] исследованы замкнутые систем с подвижными источниками воздействия с использованием предложенных методов реализации и подстановки. Показано, что в условиях неполной информации об операторе объекта и внешних возмущениях эффективно использовать разрывные управления (скользящие режимы). Показано, что в классе кусочно-непрерывных распределенных управлений, оптимальными при определенных ограничениях являются подвижные управления. Построены алгоритмы

оптимальных подвижных кусочно-непрерывных и импульсных управлений. Разработан ряд конкретных устройств управления подвижными источниками энергии в электронно-лучевых установках применительно к процессам плавки и термообработки.

В работах [81]-[83] исследуются задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями параболического или гиперболического типов с управлениями подвижных источников, например, исследуется задача минимизации функционала

$$J(v) = \alpha_1 \int_0^l [u(x, T) - y_1(x)]^2 dx + \alpha_2 \int_0^l [u_t(x, T) - y_2(x)]^2 dx + \\ + \sum_{k=1}^n \left\{ \beta_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt + \beta_2 \int_0^T [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)]^2 dt \right\},$$

на множестве решений краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta(x - s_k(t)), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u_x|_{x=0} = g_1(t), \quad u_x|_{x=l} = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где  $\Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ;  $a, l, T > 0$  – заданные числа;  $s_k(t) \in [0, l]$ ;  $g_i(t) \in L_2(0, T), i = 1, 2$ ;  $\varphi_j(x) \in L_2(0, l), j = 1, 2$ ; – заданные функции;  $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ ,  $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)) \in L_2^n(0, T)$  – управляющие функции,  $\delta(\cdot)$  – функция Дирака. Для данной задачи оптимального управления доказана теорема существования и единственности решения.

В отличие от достаточно полно исследованного многими авторами [22 и др.] случая, когда внешние возмущающие воздействия описываются линейными функциями, задачи оптимального управления в случаях, когда функция внешнего источника нелинейно зависит от несколько управляющих параметров почти не изучены. В этом направлении одними из пионерских исследований являются работы [51, 52, ...]. В этих исследованиях установлено,

что в случаях, когда действия внешнего источника описывается нелинейными функциями, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида и удовлетворяет дополнительному условию в виде неравенства. Разработана методика построения решения этой задачи, которое представляет интерес, как в теории оптимального управления, так и в самой теории интегральных уравнений. Результаты исследований проф. А. Керимбекова были подытожены в работе [51]. Благодаря этой разработке оказалось возможным исследовать многие задачи прикладного характера, описываемых уравнениями в частных производных. В этом направлении по результатам исследований были защищены 4 кандидатские диссертации [Урывская Т.Ю., Красниченко Л.С., Асанова Ж.К., Баетов А.К.].

В диссертации [86] была исследована задача минимизации кусочно – линейного функционала

$$I[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt, \quad \beta > 0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + a(t)V + g(x)f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, 0 < t < T,$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad \alpha > 0, 0 < t \leq T$$

условиям, где коэффициент  $a(t) \in H(0, T)$  является разрывной функцией,  $g(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi(x) \in H(0, 1)$ ,  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$  – заданные функции, причем функция внешнего воздействия  $f[t, u(t)]$  нелинейно зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$ ,  $H$  – гильбертово пространство,  $T$  – фиксировано.

При исследовании основное внимание было уделено влиянию разрывного коэффициента  $a(t) \in H(0, T)$  на решение задачи оптимизации. Впервые разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов в случае, когда уравнение управляемого

процесса содержит разрывный коэффициент и минимизируется кусочно-линейный (или квадратичный) функционал.

В диссертации [65] была исследована задача минимизации квадратичного функционала

$$I[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in Q,$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = p[t, u(t)], \quad \alpha > 0, \quad 0 < t \leq T,$$

где заданная функция  $f(t, x) \in H(Q)$  описывает изменения, постоянно действующего внешнего теплового потока, а функция  $p[t, u(t)] \in H(0, T)$ , нелинейно зависящая от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$ , описывает изменения граничного теплового источника;  $\psi(x) \in H(0, 1)$  функция начального состояния управляемого процесса; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени;  $H$  – пространство Гильберта.

В процессе исследования были рассмотрены случаи, когда функция граничного управления нелинейно зависит от управляющих параметров. При использовании методики работы [51] впервые, на примере управления тепловыми процессами, происходящими в стержне конечной длины, разработан алгоритм построения приближенного решения нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов в случае,

1) когда функция граничного воздействия (теплового потока) нелинейно зависит от скалярной функции управления (управление с одного конца);

2) когда функции граничных воздействий (тепловых потоков) нелинейно зависят от векторной функции управления (векторное управление с двух концов).

В диссертации [6] были исследованы задачи минимизации функционалов вида

$$J[u_1(t), \dots, u_m(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0$$

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[t, u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < x \leq T$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha > 0,$$

где  $\psi(x) \in H(0, 1)$  – функция начального состояния процесса,  $\mu_k(t)$  – непрерывные на  $[0, T]$  ограниченные функции ( $0 < \mu_k(t) < 1, t \in [0, T]$ ), описывающие изменения положения подвижных точечных источников;  $f_k[t, u_k(t)] \in H(0, T)$  – заданные монотонные функции, каждая из которых нелинейно зависит от функции управления  $u_k(t) \in H(0, T)$ . Найдены условия разрешимости задачи нелинейной оптимизации распространения тепла в стержне конечной длины в случае, когда имеются один или несколько подвижных точечных источников; разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодно точности задачи нелинейной оптимизации с подвижными точечными управлениями, как в случае минимизации квадратичного функционала, так и в случае минимизации кусочно-линейного функционала;

В диссертации [8] были исследованы задачи минимизации функционала вида

$$J[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0$$

где  $F^0$  – заданная функция, определенная в области  $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , с заданной функцией  $\xi(x) \in H(0,1)$  на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} V_{tt} &= V_{xx} + a(t)V + g(t,x)f[t,u(t)], \\ V(0,x) &= \psi_1(x), \quad V_t(0,x) = \psi_2(x) \\ V_x(t,0) &= 0, \quad V_x(t,l) + \alpha V(t,l) = 0, \quad \alpha > 0, \quad t \in (0,T), \end{aligned}$$

а также функционала вида

$$I[p] = \varepsilon \iint_{\bar{Q}} F^0(x,t,V,u) dx dt,$$

на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - R^4 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} &= \varepsilon F(x,t,V,u) \\ V(x,0) &= \varphi(x), \quad V_t(x,0) = \psi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \\ V(0,t) &= V(l,t) = 0, \quad V_{xx}(0,t) = V_{xx}(l,t) = 0 \quad (0 < t \leq T) \end{aligned}$$

условиями; где  $a(t) \in H(0,T)$ ,  $g(t,x) \in H(Q)$ ,  $\psi_1(x) \in H(0,1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0,1)$  – заданные функции,  $H$  – гильбертово пространство;  $T$  – фиксировано;  $f[t,u(t)]$  – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от векторного управления  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $u_i(t) \in H(0,T)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; и является монотонной по каждому функциональному аргументу  $u_i(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , т.е. имеют место условия

$$\frac{\partial f[t, u_1(t), \dots, u_m(t)]}{\partial u_k(t)} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $R^4 = EI \cdot m^{-1}$  – отношение изгибной жесткости балки к линейной плотности [81];  $t$  – время;  $x$  – координата;  $u$  – прогиб в плоскости  $xOy$ ;  $\varepsilon > 0$  – малый параметр;  $F$  – заданная функция (возмущающие силы), непрерывная по всем своим аргументам;  $u(x,t)$  – управляющая функция, а  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  – известные функции. Установлено, что при наличии разрывного по временной переменной  $t$  коэффициента в уравнении, коэффициенты Фурье решения краевой задачи



определяются как решение интегрального уравнения типа Вольтерра, эквивалентное известному линейному неоднородному дифференциальному уравнению Матье.

Рассматриваемые в данной диссертационной работе задачи оптимального управления колебательными процессами, где уравнение управляемого процесса является линейным неоднородным, и управление нелинейно входит в свободный член уравнения, назовем задачами нелинейной оптимизации колебательных процессов. Данная диссертационная работа выполнена на основе методики работы [51] и исследует такие задачи при наличии точечных подвижных управляющих воздействий.

## ГЛАВА II. ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

### 2.1. Решение задачи оптимизации при подвижном точечном управлении

В этом разделе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления процессом колебаний в случае, когда внешнее воздействие, нелинейно зависящее от функции управления, приложено к некоторой фиксированной точке управляемого объекта. Согласно методике работы [51] разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи точечного оптимального управления при минимизации квадратичного функционала.

#### Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим упругие колебания системы конечной длины, описываемые функцией  $V(t, x)$ , которая в области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  удовлетворяет уравнению [84]

$$V_{tt} = V_{xx} + \delta[x - x_0(t)]f[t, u(t)], \quad (t, x) \in Q, \quad (2.1.1)$$

а на границе области  $Q$  – начальным условиям

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.1.2)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1.3)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $x_0$  – точка приложения функции внешнего воздействия  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ , является функцией от времени  $t \in [0, T]$  и удовлетворяет ограничению

$$0 \leq x_0(t) \leq 1; \quad (2.1.4)$$

функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$  и удовлетворяет условию монотонности

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \equiv f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (2.1.5)$$

$\psi_1(x) \in H(0, 1), \psi_2(x) \in H(0, 1)$  – функции начального состояния системы;  $H$  – пространство Гильберта; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3) называется любая функция  $V(t, x) \in H(Q)$ , которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (V_t \Phi)^2 dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [V_t \Phi_t - V_x \Phi_x + \delta(x - x_0(t)) f[u(t)] \Phi] dx dt - \alpha \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, 1) V(t, 1) dt \quad (2.1.6)$$

для любых моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$ ), для любой функции  $\Phi(t, x) \in C^{1,1}[Q]$  и удовлетворяет начальным условиям (2.1.2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi_1(x)] \Phi_0(x) dx &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V_t(t, x) - \psi_2(x)] \Phi_1(x) dx &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

выполняются для любых функций  $\Phi_0(x) \in H(0, 1), \Phi_1(x) \in H(0, 1)$ .

Решение краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad (2.1.8)$$

где  $V_n(t) = \int_0^1 V(t, x) z_n(x) dx = \langle V(t, x), z_n(x) \rangle$  – коэффициенты Фурье; функция

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x, \quad n=1, 2, 3, \dots$$
 – решение краевой задачи

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(1) + \alpha z(1) = 0$$

и система функций  $\{z_n(x)\}$  является ортонормированной в пространстве  $H(0, T)$ ;  $\lambda_n$  – корни трансцендентного уравнения  $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$ , удовлетворяющие условиям

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Согласно методике работы [75], полагая в тождестве (2.1.6)  $\Phi(t, x) \equiv z_n(x)$  относительно коэффициента Фурье  $V_n(t)$  получим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 \langle V, z_n \rangle}{\partial t^2} + \lambda_n^2 \langle V, z_n \rangle = z_n[x_0(t)] f[t, u(t)] \quad (2.1.9)$$

$$\langle V, z_n \rangle_{t=t_1} = \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle, \quad \langle V_t, z_n \rangle_{t=t_1} = \langle V_t(t_1, x), z_n(x) \rangle, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Решение задачи Коши (2.1.9) находим по формуле

$$\begin{aligned} \langle V(t, x), z_n(x) \rangle &= \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle \cos \lambda_n(t - t_1) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_n} \langle V_t(t_1, x), z_n(x) \rangle \sin \lambda_n(t - t_1) + \frac{1}{\lambda_n} \int_{t_1}^{t_2} \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда при  $t_1 \rightarrow 0$ , учитывая соотношения (2.1.7), коэффициенты Фурье  $V_n(t)$  находим по формуле

$$V_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad (2.1.10)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

где  $\psi_{1n}, \psi_{2n}$  – коэффициенты Фурье соответственно функций  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ .

Согласно (2.1.8) формальное решение краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3)

имеет вид

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

**Лемма 2.1.1.** Функция  $V(t, x)$  является элементом пространства  $H(Q)$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt \leq \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau \right]^2 dt \leq \\
&\leq 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n(T-\tau) z_n^2[x_0(\tau)] d\tau \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right] dt \leq \\
&\leq 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + \frac{2}{\lambda_n^2} T \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right] dt \leq \\
&\leq 3T \left[ \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2T \|f[t, u(t)]\|_H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \leq \\
&\leq 3T \left[ \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2T \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|f[t, u(t)]\|_H^2 \right] < \infty, \tag{2.1.12}
\end{aligned}$$

где символом  $\|\cdot\|_H$  обозначена норма элемента гильбертова пространства  $H$ , т.е.

$$V(t, x) \in H(Q).$$

Аналогичным образом можно показать, что  $\int_0^T \int_0^1 V_x^2(t, x) dx dt < \infty$ .

Действительно,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 V_x^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z'_n(x) \right)^2 dx dt = \\
&= \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z'_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) z'_k(x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \int_0^1 z'_n(x) z'_k(x) dx dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x, \quad n=1, 2, 3, \dots \text{ — решение краевой задачи}$$

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(1) + \alpha z(1) = 0$$

и то, что система функций  $\{z_n(x)\}$  является ортонормированной в пространстве

$H(0, T)$  имеем:

$$z'_n z'_k = \frac{1}{2} \left( (z_n z'_k)' + (z'_n z_k)' + z_n z_k (\lambda_k^2 + \lambda_n^2) \right);$$

$$\int_0^1 z'_n z'_k dx = \frac{1}{2} \left[ (z_n z'_k)_0^1 + (z'_n z_k)_0^1 + (\lambda_k^2 + \lambda_n^2) \delta_{nk} \right] = -\alpha z_n(1) z_k(1) + \frac{1}{2} (\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \delta_{nk}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 V_x^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \left( -\alpha z_n(1) z_k(1) + \frac{1}{2} (\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \delta_{nk} \right) dt = \\ &= -\alpha \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(1) \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) z_k(1) dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 V_n^2(t) dt = \\ &= -\alpha \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V^2(t, x) \Big|_{x=1} dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 V_n^2(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 V_n^2(t) dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left[ \psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \int_0^T \frac{g_n^2}{\lambda_n^2} d\tau \cdot \int_0^T u^2(\tau) d\tau \right] dt \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \|u(t)\|^2 \right] < \infty \end{aligned}$$

следует, что  $\int_0^T \int_0^1 V_x^2(t, x) dx dt < \infty$ .

Заметим, что единственность слабообобщенного решения краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3), соответствующего данному управлению  $u(t) \in H(0, T)$ , имеет место лишь в случае, когда для функции  $f[t, u(t)]$  выполняется условие монотонности (2.1.5).

### **Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности**

Управление  $u(t) \in H(0, T)$ , для которого краевая задача (2.1.1) – (2.1.3) имеет единственное обобщенное решение, назовем допустимым. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (2.1.13)$$

на множестве допустимых управлений  $u(t) \in H(0, T)$ , где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция.

Управление  $u^0(t) \in H(0, T)$ , на котором функционал (2.1.13) достигает минимального значения называется оптимальным, а соответствующее ему решение краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3)  $V^0(t, x)$  – оптимальным процессом.

Для получения условий оптимальности составим вспомогательный функционал

$$J_1(u) = \int_0^T \int_0^1 (V_{tt} - V_{xx} - \delta(x - x_0) f[t, u(t)]) \omega dx dt + \\ + \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt$$

и вычислим приращение функционала

$$\Delta J_1(u) = J_1(u + \Delta u) - J_1(u) = \int_0^T \int_0^1 [V_{tt} + \Delta V_{tt} - V_{xx} - \Delta V_{xx} - \delta(x - x_0) f(t, u + \Delta u)] \omega dx dt + \\ + \int_0^1 [V + \Delta V - \xi]^2 dx + \beta \int_0^T (u + \Delta u)^2 dt - J_1(u) = \\ = \int_0^T \int_0^1 [\Delta V_{tt} - \Delta V_{xx} - \delta(x - x_0) f(t, u + \Delta u) - f(t, u)] \omega dx dt + \\ + \int_0^1 2[V(T, x) - \xi] \Delta V(T, x) + \Delta V^2(T, x) + \beta \int_0^T (2u \Delta u + \Delta u^2) dt.$$

После несложных преобразований, учитывая, что  $\omega(t, x_0(t))$  – слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} = \omega_{xx}, \quad (t, x) \in Q,$$

$$\omega(T, x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_t(T, x) - 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Delta J_1[u] &= \int_0^1 \Delta V^2(T, x) dx - \int_0^T \left[ (f(t, u + \Delta u) - f(t, u)) \omega[t, x_0(t)] - \beta(2u\Delta u + \Delta u^2) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \Delta V^2(T, x) dx - \int_0^T \Delta \Pi(\cdot, u) dt, \end{aligned}$$

где

$$\Pi(\cdot, u) = f[t, u(t)] \omega[t, x_0(t)] - \beta u^2(t);$$

Решение сопряженной краевой задачи ищем в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x),$$

где  $\omega_n(t)$  определяется как решение задачи

$$\omega_n''(t) + \lambda_n^2 \omega_n(t) = 0,$$

$$\omega_n(T) = 0,$$

$$\omega_n'(T) = 2[V_n(T) - \xi_n]$$

и имеет вид

$$\omega_n(t) = -\frac{2}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_n] \sin \lambda_n (T - t) = \frac{2}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right];$$

$$\text{где } G_n(t) = \frac{z_n[x_0(t)]}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t), \quad h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n T.$$

Тогда

$$\omega(t, x_0(t)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x) \quad (2.1.14)$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [22] получены следующие условия оптимальности



$$f_u [t, u(t)] \cdot \omega [t, x_0(t)] - 2\beta u(t) = 0,$$

$$f_{uu} [t, u(t)] \cdot \omega [t, x_0(t)] - 2\beta < 0.$$

Представим их в виде

$$2\beta u(t) f_u^{-1} [t, u(t)] = \omega [t, x_0(t)], \quad (2.1.15)$$

$$f_u [t, u(t)] (u(t) f_u^{-1} [t, u(t)])_u > 0, \quad (2.1.16)$$

Второе условие оптимальности (2.1.16), обеспечивающее максимум функции  $\Pi(\cdot, u)$ , получено исключением функции  $\omega(t, x)$ . Отметим, что это условие является еще одним ограничением для функции  $f [t, u(t)]$ .

### Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Согласно (2.1.11) и (2.1.14) равенство (2.1.15) перепишем в виде

$$\beta u(t) f_u^{-1} [t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f [\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (2.1.17)$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно оптимального управления  $u^0(t)$ . С учетом (2.1.16) мы получаем новую задачу, т.е. задачу, где требуется найти решение нелинейного интегрального уравнения (2.1.17), удовлетворяющее дополнительному условию в виде дифференциального неравенства (2.1.16).

Чтобы найти это решение, согласно методике работы [51], преобразуем уравнение (2.1.17). Положим

$$\beta u(t) f_u^{-1} [t, u(t)] = p(t). \quad (2.1.18)$$

В силу условия (2.1.16) это равенство однозначно разрешается относительно  $u(t)$ , т.е. существует единственная функция  $\varphi(\cdot)$  такая, что

$$u(t) = \varphi [t, p(t), \beta]. \quad (2.1.19)$$

С учетом (2.1.18) и (2.1.19) уравнение (2.1.17) перепишем в виде

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f (\tau, \varphi [\tau, p(\tau), \beta]) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n$$

или в операторной форме

$$p = G[p], \quad (2.1.20)$$

$$G[p] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right].$$

**Лемма 2.1.2.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[p] dt &= \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right] \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left( \left[ \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n \right]^2 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right]^2 \right) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right)^2 \right] \right) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau) d\tau \int_0^T f^2(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right] \right) dt. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2[x_0(t)]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n(T-t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} = 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \leq 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right); \\ \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n T \right)^2 \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \right] \leq \\ &\leq 3 \left( \|\xi(x)\|_H^2 + \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 \right) \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T G_n^2[p] dt &\leq \\ &\leq 2T \cdot 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[ 3 \left( \|\xi(x)\|_H^2 + \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 \right) + T \cdot 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|f(\cdot)\|_H^2 \right], \end{aligned}$$

т.е.  $G: H \rightarrow H$ , т.к.  $f(t, u) = f(t, \varphi(t, p, \beta)) \in H$ ,  $\forall p(t) \in H$ .

**Лемма 2.1.3.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad (2.1.21)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H. \quad (2.1.22)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2T \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1 \quad (2.1.23)$$

оператор  $G[\cdot]$  является сжимающим.

**Доказательство.**

Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|G[p] - G[\bar{p}]\|_H^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, \bar{p}(\tau), \beta]) d\tau \right] \right\|_H^2 = \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) [f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})] d\tau \right\|_H^2 = \\ &= \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) [f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})] d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t) dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau) d\tau \int_0^T [f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})]^2 d\tau \leq \\ &\leq T^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \right)^2 \|f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})\|_H^2 \leq 4T^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \|f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})\|_H^2 \leq \\ &\leq 4T^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 f_0^2 \|\varphi(\tau, p(\tau), \beta) - \varphi(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)\|_H^2 \leq \\ &\leq 4T^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|p(\tau) - \bar{p}(\tau)\|_H^2; \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\|G[p] - G[\bar{p}]\|_H \leq 2T \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \|p(\tau) - \bar{p}(\tau)\|_H,$$

откуда следует утверждение леммы.

**Теорема 2.1.1.** При выполнении условий (2.1.5), (2.1.21) – (2.1.23) операторное уравнение (2.1.20) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Доказательство следует из лемм 1–2 и из известной теоремы [74] о принципе сжимающих отображений.

Решение операторного уравнения (2.1.20) может быть найдено методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\|p^0(t) - p_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (2.1.24)$$

где  $p_0(t) \in H(0, T)$  – произвольный элемент.

Далее найденное  $p^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$  подставляя в (2.1.19) находим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \quad (2.1.25)$$

Оптимальное управление  $u^0(t)$  подставляя в (2.1.11) находим оптимальный процесс

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x) \quad (2.1.26)$$

и вычислим минимальное значение функционала

$$J[u^0] = \int_0^1 [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt. \quad (2.1.27)$$

Таким образом, найденная тройка  $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$  определяет решение нелинейной задачи оптимизации.

### Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации

Для практического использования вместо точного решения интегрального уравнения (2.1.20) находят приближенное решение  $p_k(t)$ , удовлетворяющее оценке (2.1.24). Соответственно, согласно (2.1.25), найдем  $k$ -е приближение оптимального управления

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta],$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (2.1.28)$$

По найденному  $u_k(t)$ , согласно формуле (2.1.11), находим  $k$ -е приближение оптимального процесса

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x).$$

Докажем, что данное  $k$ -е приближение оптимального процесса удовлетворяет следующей оценке

$$\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq T \left[ 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (2.1.29)$$

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned} & \|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H^2 = \\ & = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n [x_0(\tau)] f[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x) \Bigg|_H^2 = \\
& = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n [x_0(\tau)] (f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)]) d\tau z_n(x) \right\|_H^2 = \\
& = \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n [x_0(\tau)] (f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)]) d\tau z_n(x) \right)^2 dx dt = \\
& = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) z_n [x_0(\tau)] (f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)]) d\tau \right)^2 dt \leq \\
& = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n (T - \tau) z_n^2 [x_0(\tau)] d\tau \int_0^T (f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)])^2 d\tau dt \leq \\
& \leq T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} 2T \|f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \leq \\
& \leq 2T^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|f[\tau, u^0(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \leq \\
& \leq 2T^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|u^0(\tau) - u_k(\tau)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (2.1.28), следует оценка (2.1.29).

После определения  $u_k(t)$  и  $V_k(t, x)$ , согласно формуле (2.1.13), вычисляется  $k$ -е приближение минимального значения функционала

$$J[u_k] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0.$$

Докажем, что данное  $k$ -е приближение функционала удовлетворяет следующей оценке

$$|J[u^0] - J[u_k]| \leq \left[ C_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta C_2 \right] \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (2.1.30)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – положительные постоянные.

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned}
& |J[u^0] - J[u_k]| = \\
& = \left| \int_0^1 [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt - \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx - \beta \int_0^T u_k^2(t) dt \right| = \\
& = \left| \int_0^1 \left( [V^0(T, x)]^2 - 2V^0(T, x)\xi(x) + 2V_k(T, x)\xi(x) - V_k^2(T, x) \right) dx + \right. \\
& \left. + \beta \int_0^T \left( [u^0(t)]^2 - u_k^2(t) \right) dt \right| = \\
& = \left| \int_0^1 (V^0(T, x) - V_k(T, x))(V^0(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x)) dx + \right. \\
& \left. + \beta \int_0^T (u^0(t) - u_k(t))(u^0(t) + u_k(t)) dt \right| \leq \\
& \leq \|V^0(T, x) - V_k(T, x)\|_{H(0,1)} \cdot \|V^0(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x)\|_{H(0,1)} + \\
& + \beta \|u^0(t) - u_k(t)\|_{H(0,T)} \cdot \|u^0(t) + u_k(t)\|_{H(0,T)} \leq \\
& \leq C_1 \|V^0(T, x) - V_k(T, x)\|_{H(0,1)} + \beta C_2 \|u^0(t) - u_k(t)\|_{H(0,T)},
\end{aligned}$$

где

$$C_1 = \|V^0(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x)\|_{H(0,1)}, \quad C_2 = \|u^0(t) + u_k(t)\|_{H(0,T)}.$$

Отсюда, с учетом (2.1.28) и (2.1.29) следует оценка (2.1.30).

Как следует из оценок (2.1.28) – (2.1.30) приближенное решение  $(u_k(t), V_k(t, x), J[u_k])$  задачи нелинейной оптимизации сходится при  $k \rightarrow \infty$  к точному решению  $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$ .

## 2.2. Решение задачи оптимизации при наличии нескольких подвижных точечных управлений

В этом разделе исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при минимизации квадратичного функционала в случае, когда внешние точечные источники, нелинейно

зависящие от функции управления, являются подвижными. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения решения задачи сколь угодно точности.

### Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Пусть управляемый процесс  $V(t, x)$  в области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  удовлетворяет краевой задаче [84]

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2.1)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.2.2)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2.3)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $\mu_k(t)$  – точки приложения внешних воздействий  $f_k[t, u_k(t)] \in H(0, T)$ , каждая из которых нелинейно зависит от функции  $u_k(t) \in H(0, T)$ , являются подвижными и изменяются по заданному закону  $\mu_k = \mu_k(t)$ ,  $0 < \mu_k(t) < 1$ ; причем

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \neq 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.2.4)$$

$\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции начального состояния струны;  $H$  – пространство Гильберта; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Краевая задача (2.2.1) – (2.2.3) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (2.2.5)$$

которое удовлетворяет интегральному тождеству [75]



$$\int_0^1 (V_t \Phi)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left[ V_t \Phi_t - V_x \Phi_x + \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k[u_k(t)] \Phi \right] dx dt - \alpha \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, 1) V(t, 1) dt,$$

для любых моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$ ), и для любой функции

$\Phi(t, x) \in C_2^{1,1}[Q]$ , и начальным условиям (2.2.2) в слабом смысле, т.е.

выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi_1(x)] \Phi_0(x) dx = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V_t(t, x) - \psi_2(x)] \Phi_1(x) dx = 0,$$

для любых функций  $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$ ,  $\Phi_1(x) \in H(0, 1)$ .

**Лемма 2.2.1.**  $V(t, x)$  является элементом пространства  $H(Q)$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right]^2 \leq \\ &\leq 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n}^2 \cos^2 \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 \sin^2 \lambda_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n(t - \tau) d\tau \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] \right)^2 d\tau \right] dt \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T (z_n(\mu_1) f_1(u_1) + \dots + z_n(\mu_m) f_m(u_m))^2 d\tau \right] \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle \psi_2, z_n \rangle|^2 + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} 2m \int_0^T \sum_{k=1}^m f_k^2(u_k) d\tau \right] \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 \|z_n\|_H^2 + 2Tm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \|\bar{f}(\bar{u})\|_{H^m(0, T)}^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2Tm \|f(t, \bar{u}(t))\|_{H^m(0,T)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \leq \\
&= 3T \left[ \|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \left( \|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2Tm \|f(t, \bar{u}(t))\|_{H^m(0,T)}^2 \right) \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) \right] < \infty,
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

### Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности

Векторное управление  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in H^m(0, T)$ ,

$H^m = H \times H \times \dots \times H$  – декартово произведение пространств  $H$ , для которого краевая задача (2.2.1) – (2.2.3) имеет единственное обобщенное решение, назовем допустимым управлением. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: на множестве допустимых управлений  $u(t) \in H^m(0, T)$  требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (2.2.6)$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция требуемого состояния управляемого процесса в конечный момент времени  $T$ .

Для получения условий оптимальности составим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned}
J_1[u(t)] = & \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt + \\
& + \int_0^T \int_0^1 (V_{tt} - V_{xx} - \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k(u_k(t))) \omega dx dt
\end{aligned}$$

и вычислим его приращение

$$\begin{aligned}
\Delta J_1[u] = & J_1(u + \Delta u) - J_1(u) = \int_0^1 [V + \Delta V - \xi]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (u_k + \Delta u_k)^2 dt + \\
& + \int_0^T \int_0^1 \left[ V_{tt} + \Delta V_{tt} - V_{xx} - \Delta V_{xx} - \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k(u_k + \Delta u_k) \right] \omega dx dt -
\end{aligned}$$

$$-\int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx - \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt - \int_0^T \int_0^1 (V_{tt} - V_{xx} - \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k(u_k(t))) \omega dx dt.$$

После несложных преобразований, учитывая, что  $\omega(t, x)$  – обобщенное решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} = \omega_{xx}, \quad (t, x) \in Q,$$

$$\omega(T, x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_t(T, x) - 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) = 0$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta J_1[u] &= \int_0^1 (\Delta V)^2(T, x) dx + \\ &+ \int_0^T \sum_{k=1}^m \left( \beta [2u_k \cdot \Delta u_k + (\Delta u_k)^2] - [f_k(t, u_k + \Delta u_k) - f_k(t, u_k)] \omega[t, \mu_k(t)] \right) dt = \\ &= \int_0^1 (\Delta V)^2(T, x) dx - \int_0^T \Delta \Pi(\cdot, u) dt, \end{aligned}$$

где

$$\Pi(\cdot, u) = \sum_{k=1}^m \left( f_k[t, u_k(t)] \omega[t, \mu_k(t)] - \beta u_k^2(t) \right).$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [22] оптимальное векторное управление  $u(t)$  удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$\frac{\partial f_k(u_k)}{\partial u_k} \cdot \omega[t, \mu_k(t)] - 2\beta u_k(t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{\partial f_k(u_k)}{\partial u_k} \right) \cdot \omega[t, \mu_k(t)] - 2\beta < 0.$$

Исключая из второго условия функцию  $\omega(t, x)$  представим их в виде

$$2\beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} = \omega[t, \mu_k(t)], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( u_k(t) / \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right) > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (2.2.8)$$

причем  $\omega(t, x)$  является обобщенным решением сопряженной краевой задачи, которое ищется в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x),$$

где  $\omega_n(t)$  определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} \omega_n''(t) + \lambda_n^2 \omega_n(t) &= 0, \\ \omega_n(T) &= 0, \\ \omega_n'(T) &= 2[V_n(T) - \xi_n] \end{aligned}$$

и имеет вид

$$\omega_n(t) = -\frac{2}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_n] \sin \lambda_n (T - t) = \frac{2}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right];$$

где

$$G_n(t, \mu_k(t)) = \frac{1}{\lambda_n} z_n[\mu_k(t)] \sin \lambda_n (T - t), \quad (2.2.9)$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n T. \quad (2.2.10)$$

Тогда

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t) \left[ \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau - h_n \right] z_n(x). \quad (2.2.11)$$

### Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

В силу монотонности функции  $f_k[t, u_k(t)]$  выполняется условие (2.2.4), и существует обратная функция

$$\left( \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1}, \quad t \in [0, T].$$

Поэтому, согласно (2.2.7) и (2.2.11) относительно оптимального управления  $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$  получим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i[u_i(\tau)] d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (2.2.8).

Введем обозначения

$$\beta u_k(t) \left( \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k(t)} \right)^{-1} = p_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.2.13)$$

Отсюда в силу (2.2.7), функция  $u_k(t)$  определяется однозначно, т.е. существует функция  $\varphi_k[\cdot]$  такая, что

$$u_k(t) = \varphi_k[t, p_k(t), \beta], \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (2.2.14)$$

Согласно (2.2.13) и (2.2.14) систему уравнений (2.2.12) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & p_k(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i[\tau, \varphi_i[t, p_i(\tau), \beta]] d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

или вводя обозначения

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \dots \\ p_m(t) \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \dots \\ h_m(t) \end{pmatrix}, \quad G[p] = \begin{pmatrix} G[p_1] \\ \dots \\ G[p_m] \end{pmatrix}, \quad \bar{G}[p] = h(t) - G[p], \quad \text{где}$$

$$h_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n,$$

$$G[p_k] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i(\tau, \varphi_i[\tau, p_i(\tau), \beta]) d\tau, \quad (2.2.16)$$

представим в операторной форме

$$p = \bar{G}[p] \quad (2.2.17)$$

**Лемма 2.2.2.**  $h = h(t)$  является элементом пространства  $H^m(0, T)$ .

**Доказательство.** Учитывая условия для собственных значений  $\lambda_n$ , (2.2.9), (2.2.10) и свойства функций  $\psi(x)$ ,  $\xi(x)$  непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T h^2(t) dt &= \int_0^T \sum_{k=1}^m h_k^2(t) dt = \sum_{k=1}^m \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n \right)^2 dt \leq \sum_{k=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2[t, \mu_k(t)] \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2[t, \mu_k(t)] \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \leq \int_0^T \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2[\mu_k(t)]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n(T-t) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \right)^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_0^T 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1^2} \right) 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \right] dt \leq \\ &\leq 2mT \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \cdot 3 \left( \|\xi_1(x)\|_{H^m}^2 + \|\psi_1(x)\|_{H^m}^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_{H^m}^2 \right), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

**Лемма 2.2.3.** Оператор  $\bar{G}[\cdot]$  отображает пространство  $H^m$  в себя.

**Доказательство.** Согласно (2.2.4) функции  $p_k(t)$  ограничены и являются элементами пространства  $H(0, T)$ .

$$\begin{aligned} \|\bar{G}[p]\|_{H^m}^2 &= \int_0^T \sum_{i=1}^m (\bar{G}_i[p_i])^2 dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, \mu_i(t)) \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, \mu_i(t)) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[ h_n^2 + \left( \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right)^2 \right] dt \leq \\
&\leq 4T \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + Tm \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n^2(\tau, \mu_k(\tau)) f_k^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right) \leq \\
&\leq 12Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + Tm \frac{2}{\lambda_n^2} \int_0^T \sum_{k=1}^m f_k^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right) \leq \\
&\leq 12Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right).
\end{aligned}$$

$$\cdot \left[ \|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2 + \|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left( \|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2Tm \|f\|_{H(0,1)}^2 \right) \right] < \infty,$$

откуда следует утверждение леммы.

**Лемма 2.2.4.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, \bar{u}(t)] - f[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^m} \leq f_0 \|\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)\|_H, \quad f_0 > 0$$

$$\|\varphi[t, \bar{p}(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}(t) - \tilde{p}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор  $\bar{G}[\cdot]$  является сжимающим.

**Доказательство**

$$G[p_i] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, p_k(\tau), \beta)] d\tau \right], \quad i = \overline{1, m};$$

$$\bar{G}[\bar{p}] = \begin{bmatrix} G[p_1] \\ \dots \\ G[p_m] \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{bmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, p_k(\tau), \beta)] d\tau \right];$$

$$\|\bar{G}[\bar{p}]\|_{H^m}^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^m |G_i[p_i]|^2 dt = \sum_{i=1}^m \int_0^T |G[p_i]|^2 dt;$$

$$\begin{aligned} \bar{G}[\bar{p}] - \bar{G}[\tilde{p}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{pmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] d\tau \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{pmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] d\tau \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{pmatrix} \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) \cdot \\ &\quad \cdot (f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)]) d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{G}[\bar{p}] - \bar{G}[\tilde{p}]\|_{H^m}^2 &= \int_0^T \sum_{i=1}^m \left| \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)]) d\tau \right|^2 dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2[t, \mu_i(t)] \cdot \\ &\quad \cdot \left( \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] (f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)]) \right)^2 \leq \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T m \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{k=1}^m (f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)])^2 d\tau dt \leq \\ &= T^2 m^2 4 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \int_0^T \sum_{k=1}^m (f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)])^2 d\tau = \\ &= 4T^2 m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \|\bar{f}[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - \bar{f}[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)]\|_{H^m}^2 \leq \\ &\leq 4\tau^2 m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|\tilde{p}_k(t) - \bar{p}_k(t)\|_{H^m}^2. \end{aligned}$$



**Теорема 2.2.1.** Операторное уравнение (2.2.17) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из лемм 2.2.3, 2.2.4 и из того, что  $H(0, T)$  является полным метрическим пространством.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам [74]

$$\bar{p}^n(t) = G[\bar{p}^{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2.18)$$

где  $\bar{p}^0(t) = (p_1^0(t), \dots, p_m^0(t))$  – произвольный элемент пространства  $H^m(0, T)$ .

Точное решение  $\bar{p}^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^n(t)$  и удовлетворяет оценке

$$\|\bar{p}^0(t) - \bar{p}^n(t)\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|\bar{G}[\bar{p}^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m}, \quad (2.2.19)$$

где

$$\gamma = 2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1.$$

### Оптимальное управление и сходимость его приближений

Пусть

$$\bar{p}(t) = \{p_1(t), \dots, p_m(t)\}, \quad (2.2.20)$$

$$\bar{p}^n(t) = \{p_1^n(t), \dots, p_m^n(t)\} \quad (2.2.21)$$

– соответственно точное и приближенное решения системы нелинейных интегральных уравнений (2.2.17). Подставляя эти решения в (2.2.14) находим оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[t, p_1(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_m(t), \beta] \end{pmatrix} \quad (2.2.22)$$

и его приближения

$$\bar{u}^n(t) = \bar{\varphi}[t, p^n(t), \beta]. \quad (2.2.23)$$

При надлежащем выборе параметра  $\beta$  оптимальное управление (2.2.22) является решением системы нелинейных интегральных уравнений (2.2.12) и удовлетворяет дополнительным условиям (2.2.8).

Учитывая, что функция  $\varphi(\cdot)$  удовлетворяет условию Липшица, имеем:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^n(t)\|_{H^m} &= \|\varphi[t, \bar{p}^0(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}^n(t), \beta]\|_{H^m} \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}^0(t) - \bar{p}^n(t)\|_{H^m} \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\bar{G}(\bar{p}^0(t)) - \bar{p}^0(t)\|_{H^m} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

из которого следует сходимость приближенного оптимального управления.

### Оптимальный процесс и сходимость его приближений.

При подстановке оптимального управления (2.2.22) в (2.2.5) получим оптимальный процесс

$$\begin{aligned} V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) \sum_{i=1}^m z_n(\mu_i(\tau)) f_i[\tau, u_i(\tau)] d\tau \right) z_n(x), \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} V^k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] f_i[\tau, u_i^k(\tau)] d\tau \right) z_n(x) \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Поскольку

$$V(t, x) - V^k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) d\tau z_n(x),$$

то из соотношения

$$\|V(t, x) - V^k(t, x)\|_H^2 = \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) d\tau z_n(x) \right]^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n(t-\tau) d\tau \int_0^T \left( \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) \right)^2 d\tau dt \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} T 2m \int_0^T \sum_{i=1}^m (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)])^2 d\tau = \\
&= \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) T 2m \|f[\tau, \bar{u}(\tau)] - f[\tau, u^k(\tau)]\|_{H^m}^2 \leq \\
&\leq \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) 2m T f_0^2 \|\bar{u}(\tau) - u^k(\tau)\|_{H^m}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

следует сходимость приближенного решения к точному.

### Минимальное значение функционала и сходимость его приближенных значений

Согласно формулам (2.2.6), (2.2.22)–(2.2.25) минимальное значение функционала  $J[u(t)]$  и его приближенное значение находим по формулам:

$$J[\bar{u}(t)] = \int_0^1 [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m \bar{u}_k^2(t) dt \quad (2.2.29)$$

$$J[u^n(t)] = \int_0^1 [V^n(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (u_k^n)^2(t) dt \quad (2.2.30)$$

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned}
|J[\bar{u}] - J[u^n]| &= \left| \int_0^1 \left\{ [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 - [V^n(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (\bar{u}_k^2(t) - (u_k^n)^2(t)) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \left\{ [\bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x)] [\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)] \right\} dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (\bar{u}_k^2(t) - (u_k^n)^2(t)) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \langle \bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x), \bar{V}(T, x) - V^n(T, x) \rangle_H \right| + \left| \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (\bar{u}_k^2(t) - (u_k^n)^2(t)) dt \right|.
\end{aligned}$$

Отсюда учитывая, что

$$1) \left| \langle \bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x), \bar{V}(T, x) - V^n(T, x) \rangle_H \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x)\| \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H \leq \\
&\leq \left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H ; \\
2) &\left| \int_0^T \sum_{k=1}^m (\bar{u}_k^2(t) - (u_k^n)^2(t)) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int_0^T (\bar{u}_k^2(t) - (u_k^n)^2(t)) dt \right| = \\
&= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^m (\bar{u}_k(t) + u_k^n(t)) (\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)) dt \right| \leq \|\bar{u}(t) + u^n(t)\|_{H^m} \|\bar{u}(t) - u^n(t)\|_{H^m} \leq \\
&\leq \|\bar{u}(t) + u^n(t)\|_{H^m} \|\bar{u}(t) - u^n(t)\|_{H^m} \leq C \|\bar{u}(t) - u^n(t)\|_{H^m} \leq \\
&\leq C \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\bar{G}(\bar{p}^0(t)) - \bar{p}^0(t)\|_{H^m} \quad (\text{согласно 2.2.24}).
\end{aligned}$$

имеем неравенство

$$\begin{aligned}
|J[\bar{u}] - J[u^n]| &\leq \left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H + \\
&+ C \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\bar{G}(\bar{p}^0(t)) - \bar{p}^0(t)\|_{H^m} \leq \\
&\leq K_0 \sqrt{M_1 m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} Tf_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m} + \\
&+ C \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\bar{G}(\bar{p}^0(t)) - \bar{p}^0(t)\|_{H^m} \leq \\
&= \left( K_0 \sqrt{M_1 m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} Tf_0 + C \right) \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m},
\end{aligned}$$

где

$$K_0 = \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \leq 2\left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|\xi(x)\|_H \right),$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала при  $n \rightarrow \infty$ .

## 2.3. Пример

Рассмотрим модельную задачу оптимального управления колебательным процессом, когда точка приложения внешнего источника совершает движение по заданному закону  $x_0(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Пусть левая граница ( $x = 0$ ) свободная (перемещается без силы трения), а правая граница ( $x = 1$ ) упруго закреплена, и состояние колебательного процесса в начальный момент времени  $t = 0$  описывается функцией  $\psi_1(x)$ , начальная скорость  $\psi_2(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Осуществляя управление с помощью подвижного точечного источника, действие которого описывается нелинейной функцией  $f[t, u(t)]$ ,  $const = u_0 \leq u(t) \leq u_1 = const$ , где  $u(t)$  – функция управления, требуется перевести состояние колебательного процесса из начального состояния  $\psi_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  в желаемое конечное состояние  $\xi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , за заданное время  $T$ . При этом энергия, затраченная функцией управления, и отклонение состояния  $V(T, x)$  управляемого колебательного процесса в конечный момент времени  $T$  от желаемого состояния  $\xi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (по норме гильбертова пространства  $H(0, 1)$ ) должны быть минимальными.

Математическая формализация рассматриваемой задачи приводит к следующей задаче оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt; \quad \beta > 0, \quad (2.3.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} V_{tt} &= V_{xx} + g(t, x) \delta[x - x_0(t)] f[t, u(t)], & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, \\ V(0, x) &= \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), & 0 < x < 1, & \\ V_x(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, & 0 < t \leq T, & \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где  $u(t)$  – функция управления,  $\alpha > 0$  – коэффициент упругости закрепления правой границы.

Предполагая, что функции  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  и  $\xi(x)$  являются элементами гильбертова пространства  $H(0, l)$ , функция управления  $u(t)$  является элементом гильбертова пространства  $H(0, T)$ , нелинейная функция  $f[t, u(t)]$  является монотонной по функциональной переменной  $u(t)$  при всех значениях  $t \in [0, T]$ , обобщённое решение краевой задачи (2.3.2) находим по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) g(\tau, x_0) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

где

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x, \quad z_n[x_0(t)] = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x_0(t). \quad (2.3.3)$$

Согласно разработанной методике оптимальное управление  $u^0(t)$ , на котором функционал (2.3.1) принимает наименьшее значение, определяется как решение нелинейного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) \int_0^T G_n(\tau, x_0(\tau)) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) h_n, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где

$$G_n(t, x_0(t)) = \frac{g(t, x_0(t)) z_n[x_0(t)]}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t),$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n T,$$

и удовлетворяет дополнительному условию

$$f_u[t, u(t)] \left( u(t) \cdot f_u^{-1}[t, u(t)] \right)_u > 0. \quad (2.3.5)$$

Введём обозначение

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] = p(t). \quad (2.3.6)$$

Согласно условию (2.3.5) из (2.3.6) функция  $u(t)$  определяется однозначно, т.е. существует функция  $\varphi[\cdot]$ , такая что

$$u(t) = \varphi[t, p(t), \beta]. \quad (2.3.7)$$

С учётом (2.3.6) и (2.3.7) вместо уравнения (2.3.4) будем рассматривать следующее нелинейное интегральное уравнение

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) \int_0^T G_n(\tau, x_0(\tau)) f(\tau, \theta[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) h_n, \quad (2.3.8)$$

которое при выполнении условий:

1.  $\|f(u) - f(\bar{u})\|_H \leq f_0 \|u - \bar{u}\|_H, \quad \text{const} - f_0 > 0,$
2.  $\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H, \quad \text{const} - \varphi_0(\beta) > 0,$
3.  $\gamma = 2T \left( \frac{1}{\lambda_l^2} + \frac{1}{6} \right) \|g(t, x)\|_H^2 f_0 \varphi_0(\beta) < 1$

имеет единственное решение.

Приближённое решение уравнения (2.3.8) определяется методом последовательных приближений по формуле

$$p_k(t) = G[p_{k-1}(t)], \quad (2.3.9)$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) \left[ h_n - \int_0^T G_n(\tau, x_0(\tau)) f(\tau, \theta[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right],$$

$p_0(t)$  – произвольный элемент гильбертова пространства  $H(0, T)$  и удовлетворяет следующей оценке:

$$\|p^0(t) - p_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)]\|_H, \quad (2.3.10)$$

где  $p^0(t)$  – точное решение уравнения (2.3.8).

Далее согласно (2.3.7) находим оптимальное управление  $u^0(t)$  и его  $n$ -е приближение  $u_n(t)$ , которые удовлетворяют оценке:

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (2.3.11)$$

После определения  $u^0(t)$  и  $u_k(t)$ , подставляя их в (2.3.3) находим соответственно решение краевой задачи (2.3.2)  $V^0(t, x)$  и его  $k$ -е приближение  $V_k(t, x)$ , которые удовлетворяют оценке:

$$\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq T \cdot \left( 2 \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right] \right)^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (2.3.12)$$

После того как найдено оптимальное управление  $u^0(t)$ , соответствующий ему оптимальный процесс  $V^0(t, x)$  и их  $k$ -е приближения  $u_k(t)$ ,  $V_k(t, x)$ , вычисляются минимальное значение функционала  $J[u^0(t)]$  и его приближение, которые удовлетворяют оценке:

$$|J[u^0] - J[u_k]| \leq \left[ C_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta C_2 \right] \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (2.3.13)$$

где

$$C_1 = \|V^0(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x)\|_{H(0,1)}, \quad C_2 = \|u^0(t) + u_k(t)\|_{H(0,T)}.$$

Ниже приведены результаты численных расчётов, вычисленные при условии, что

1.  $T = 1$ ,
2.  $x_0(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1$ ,
3.  $\psi_1(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1$ ,
4.  $g(t, x) = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq 1$ ,
5.  $f[t, u(t)] = \frac{1}{2} \ln[u^2(t) + 1], \quad u_0 = 1, u_1 = 2, \quad 0 \leq t \leq 1$ ,
6.  $\xi(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$ ,
7.  $\beta = 0,611$ ,
8.  $\alpha = 0,5; 1; 1.5$ .



I. Вычисление собственных значений  $\lambda_n$  которые определяются как решение трансцендентного уравнения  $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$ .

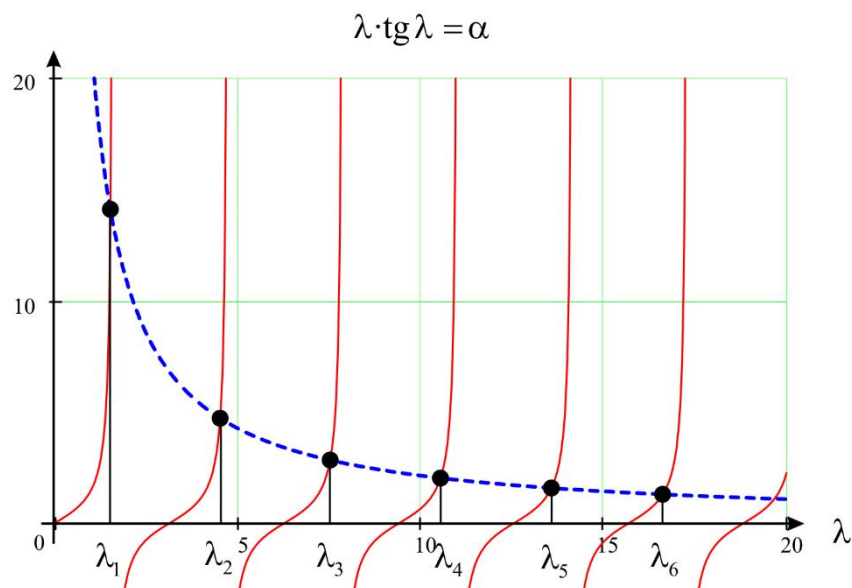


Рис. 2.3.1

Таблица 2.3.1

$\lambda$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
Значение $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$	0.653 271	3.292 31	6.361 62	9.477 49	12.60 6	15.73 97	18.87 6	22.01 39	25.15 26	28.29 2
Значение $(\alpha = 1)$	0.860 334	3.425 62	6.437 3	9.529 33	12.64 53	15.77 13	18.90 24	22.03 65	25.17 24	28.30 96
Значение $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$	0.988 241	3.542 17	6.509 66	9.580 09	12.68 41	15.80 26	18.92 86	22.05 9	25.19 2	28.32 72

Таблица 2.3.2

$\lambda^2$	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$	$\lambda_3^2$	$\lambda_4^2$	$\lambda_5^2$	$\lambda_6^2$	$\lambda_7^2$	$\lambda_8^2$	$\lambda_9^2$	$\lambda_{10}^2$
Значение $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$	0.426 763	10.83 93	40.47 02	89.82 27	158.9 12	247.7 39	356.3 05	484.6 1	632.6 54	800.4 38
Значение $(\alpha = 1)$	0.740 174	11.73 49	41.43 88	90.80 82	159.9 03	248.7 33	357.3 01	485.6 07	633.6 52	801.4 36
Значение $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$	0.976 62	12.54 69	42.37 57	91.77 82	160.8 86	249.7 22	358.2 93	486.6 01	634.6 48	802.4 32

## II. Вычисление $M_0$ , $M_1$ , $f_0$ , $\varphi_0[\beta]$ и $\gamma$ .

Числа  $M_0$  и  $M_1$  наименьшее из тех чисел, удовлетворяющее неравенству

$$\cos^2 \lambda_n t \leq M_0 = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\sin^2 \lambda_n (T - \tau) \leq M_1 = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Поскольку  $f_u(t, u(t)) = \frac{u(t)}{u^2(t)+1}$ , то в силу условия  $1 \leq u(t) \leq 2$  постоянная

Липшица  $f_0$  не превышает единицы, поэтому примем  $f_0 = 1$ . При этом выполняется второе условие оптимальности, т.е.

$$f_u[t, u(t)] \left( \frac{u(t)}{f_u[t, u(t)]} \right)_u = \frac{u(t)}{u^2(t)+1} 2u = 2 \frac{u^2(t)}{u^2(t)+1} > 0, \quad \forall u(t).$$

Поскольку  $\varphi[t, p(t), \beta] = +\sqrt{\frac{p(t)}{\beta} - 1}$  и согласно обозначению

$$\beta \frac{u(t)}{f_u(t, u(t))} = \beta(u^2(t)+1) = p(t),$$

функция  $p(t)$  удовлетворяет оценке:  $2\beta \leq p(t) \leq 5\beta$ , то подкоренное выражение удовлетворяет оценке  $1 \leq \frac{p(t)}{\beta} - 1 \leq 4$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . С учётом этих неравенств получим оценку  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right| \leq \frac{1}{2\beta} = \varphi_0(\beta)$ . Поскольку  $\beta = 0,611$ , то  $\varphi_0(\beta) = 0,818$ .

Значение параметра  $\gamma$  вычисляется по формуле

$\gamma = 2T \left( \frac{1}{\lambda_l^2} + \frac{1}{6} \right) \|g(t, x)\|_H^2 f_0 \varphi_0(\beta) < 1$  и равно  $\gamma = 0,45 < 1$ , т.е. выполняется условие сжимаемости оператора  $G[\cdot]$ .

III. Результаты вычислений  $g_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\xi_n$  приведены в таблицах 2.3.3-2.3.5.

$$\psi_n = \int_0^1 (1-x) z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 2.3.3

$\psi$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$
Значение $\left( \alpha = \frac{1}{2} \right)$	0.454 31	0.425 86	0.423 61	0.423 13	0.422 96	0.422 88	0.422 83	0.422 81	0.422 79	0.422 78
Значение $(\alpha = 1)$	0.449 74	0.428 02	0.424 4	0.423 51	0.423 18	0.423 02	0.422 93	0.422 88	0.422 85	0.422 82
Значение $\left( \alpha = \frac{3}{2} \right)$	0.446 15	0.429 42	0.425 09	0.423 87	0.423 39	0.423 16	0.423 03	0.422 95	0.422 9	0.422 87

$$g_n = \int_0^1 (1+x) z_n[x_0(t)] dx, \quad z_n[x_0(t)] = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x_0(t)$$

Таблица 2.3.4

$g$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$
Значение $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$	11.82 17	9.923	9.775 8	9.744 6	9.733 3	9.728	9.725 1	9.723 4	9.722 2	9.721 5
Значение $(\alpha = 1)$	11.51 27	10.06 48	9.827 4	9.769 4	9.747 7	9.737 3	9.731 6	9.728 2	9.725 9	9.724 4
Значение $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$	11.27 04	10.15 72	9.872 5	9.792 7	9.761 5	9.746 4	9.738 1	9.732 9	9.729 6	9.727 3

$$\xi_n = \int_0^1 x z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 2.3.5

$\xi$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
Значение $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$	0.3639 3	0.2832 2	0.2769 9	0.2756 6	0.2751 9	0.2749 6	0.2748 4	0.2747 7	0.2747 2	0.2746 8
Значение $(\alpha = 1)$	0.3507 6	0.2892 3	0.2791 7	0.2767 1	0.2757 9	0.2753 6	0.2751 2	0.2749 7	0.2748 7	0.2748 1
Значение $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$	0.3404 5	0.2931 5	0.2810 8	0.2777	0.2763 8	0.2757 4	0.2753 9	0.2751 7	0.2750 3	0.2749 3

IV. Об ограниченности нормы функции  $f(t, u(t))$ .

На рис. 2.3.2 и 2.3.3 приведены графики функций  $f(t, u(t))$  и  $f^2(t, u(t))$

и вычислено, что  $\|f(t, u^0(t))\|_H^2 = 0,648$ .

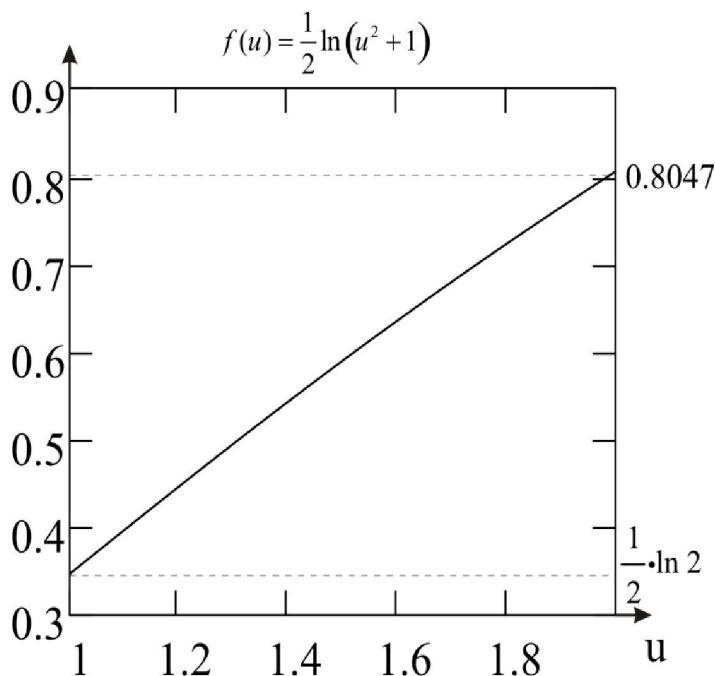


Рис. 2.3.2

$$f^2(u) = \frac{1}{4} \ln^2(u^2 + 1)$$

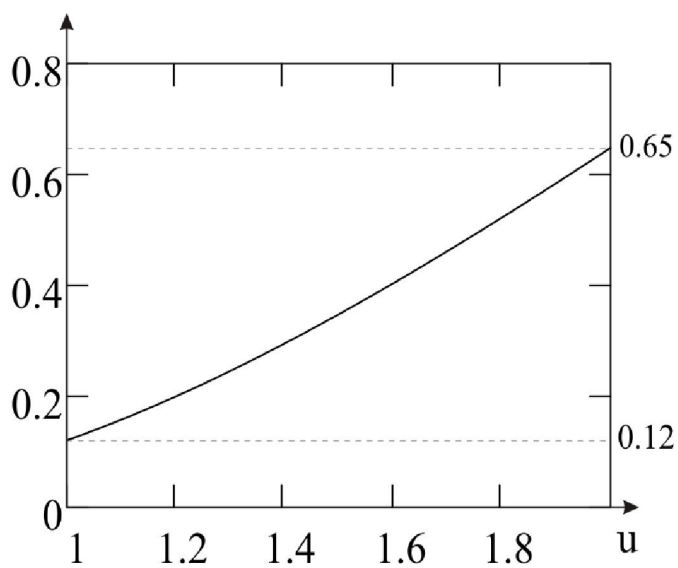


Рис. 2.3.3

V. Сходимость приближённого решения нелинейного интегрального уравнения и приближённого решения задачи оптимизации.

В таблицах 2.3.6-2.3.9 приведены результаты численных расчетов, из которых легко прослеживается сходимость приближённого решения нелинейного интегрального уравнения и приближённого решения задачи оптимизации к точному решению.

1. Сходимость приближённого решения нелинейного интегрального уравнения (численные расчеты)

Таблица 2.3.6

	$\ p^0(t) - p_k(t)\ _H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \ G[p_0(t)]\ _H,$		
$i$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	5.933	1.0209	0.46545
2	2.6809	0.27894	0.099767
3	1.2114	0.076217	0.021385
4	0.54739	0.020825	0.0045838
5	0.24734	0.0056902	0.00098253
6	0.11176	0.0015548	0.0002106
7	0.050502	0.00042482	4.5143e-005
8	0.02282	0.00011608	9.6763e-006
9	0.010312	3.1716e-005	2.0741e-006
10	0.0046594	8.666e-006	4.4458e-007

2. Сходимость по оптимальному управлению (численные расчеты).

Таблица 2.3.7

	$\ u^0(t) - u_k(t)\ _H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \ G[p_0(t)] - p_0(t)\ _H$		
$s$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	4.8552	0.83543	0.38089
2	2.1939	0.22827	0.081643
3	0.99133	0.062371	0.0175
4	0.44794	0.017042	0.0037511
5	0.20241	0.0046565	0.00080404
6	0.091461	0.0012723	0.00017234
7	0.041328	0.00034764	3.6942e-005
8	0.018674	9.4989e-005	7.9184e-006
9	0.0084382	2.5954e-005	1.6973e-006
10	0.0038129	7.0916e-006	3.6381e-007

3. Сходимость по оптимальному процессу (численные расчеты).

Таблица 2.3.8

	$\ V^0(t, x) - V_k(t, x)\ _H \leq T \cdot \left( 2 \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right] \right)^{\frac{1}{2}} f_0 \ u^0(t) - u_k(t)\ _H$		
$s$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	10.878	1.4555	0.58776
2	4.9153	0.3977	0.12598
3	2.2211	0.10867	0.027005
4	1.0036	0.029691	0.0057884
5	0.45349	0.0081127	0.0012407
6	0.20492	0.0022167	0.00026595

7	0.092594	0.00060568	5.7005e-005
8	0.04184	0.00016549	1.2219e-005
9	0.018906	4.5219e-005	2.6191e-006
10	0.0085428	1.2355e-005	5.614e-007

4. Сходимость приближений минимального значения функционала (численные расчеты).

Таблица 2.3.9

	$ J[u^0] - J[u_k]  \leq \left[ C_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta C_2 \right] \ u^0(t) - u_k(t)\ _H$		
<i>s</i>	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	146.9621	2.2719	0.35518
2	30.0066	0.16962	0.016319
3	6.1267	0.012663	0.00074977
4	1.2509	0.00094541	3.4448e-005
5	0.25542	7.0582e-005	1.5827e-006
6	0.052151	5.2695e-006	7.2719e-008
7	0.010648	3.9341e-007	3.3411e-009
8	0.0021741	2.9371e-008	1.5351e-010
9	0.00044391	2.1928e-009	7.0529e-012
10	9.0637e-005	1.6371e-010	3.2405e-013

Для рассмотренного примера в приложении приведён листинг программы в среде Matlab.

### Выводы

В первой главе исследованы задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов в случае, когда функции внешних воздействий



представлены в виде подвижных точечных источников и минимизируется интегральный квадратичный функционал.

1) Дано определение слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса и изложена методика построения слабо обобщенного решения краевой задачи в случае, когда внешними воздействиями являются подвижные точечные источники.

2) Дополнительным ограничением на класс функций внешних подвижных воздействий выступает условие в виде неравенства, которому должно удовлетворять решение нелинейного интегрального уравнения оптимального управления, что является одной из специфических особенностей рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации.

3) Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задач нелинейной оптимизации при наличии одного или нескольких точечных подвижных источников, и указан алгоритм построения приближенных решений задач нелинейной оптимизации при минимизации интегрального квадратичного функционала.

4) Приведенный численный пример подтверждает теоретические выводы.

# ГЛАВА III. ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО–ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

## 3.1. Решение задачи оптимизации при подвижном точечном управлении

В этом разделе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления колебательным процессом в случае, когда внешнее воздействие, нелинейно зависящее от функции управления, приложено к некоторой точке управляемой системы. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейного точечного управления при минимизации кусочно-линейного функционала.

### Постановка задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний

Рассмотрим задачу, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt, \quad (3.1.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} V_{tt} &= V_{xx} + a(t)V + g(t, x)\delta(x - x_0)f[t, u(t)], \\ V(0, x) &= \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \\ V_x(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Здесь  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $x_0$  – точка приложения функции внешнего воздействия,  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ , которая является функцией от времени  $t \in [0, T]$  и удовлетворяет ограничению

$$0 \leq x_0(t) \leq 1; \quad (3.1.3)$$

$a(t) \in H(0, T)$ ,  $g(t, x) \in C(\bar{Q})$ ,  $\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$ ,  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции; функция внешнего воздействия  $f[t, u(t)]$  нелинейно

зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$  и является монотонной по функциональному аргументу  $u(t)$ , т.е.

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \equiv f_u[t, u(t)] \neq 0, \forall t \in [0, T]; \quad (3.1.4)$$

$H(Y)$  – гильбертово пространство функций, определенных на множестве  $Y$ ,  $T$  – фиксированный момент времени.

### Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Решение краевой задачи (3.1.2) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad (3.1.5)$$

где функции  $z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , как решения краевой задачи  $z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0$ ,  $z'(0) = 0$ ,  $z'(1) + \alpha z(1) = 0$  образуют полную ортонормированную систему в пространстве  $H(0, 1)$ , а  $\{\lambda_n\}$  – соответствующие собственные значения, определяющиеся как решения трансцендентного уравнения  $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$  и обладающие свойствами:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1), n=0, 1, 2, \dots \quad (3.1.6)$$

**Определение.** Любая функция  $V(t, x) \in H(Q)$ , которая при каждом фиксированном управлении  $u(t) \in H(0, T)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t a(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^{\tau} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (3.1.7)$$

где  $\psi_{1n}, \psi_{2n}, V_n(t)$  – коэффициенты Фурье соответственно функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $V(t, x)$ , называется *слабо обобщенным* решением краевой задачи (3.1.2).

Коэффициенты Фурье  $V_n(t)$ , при каждом фиксированном  $n = 0, 1, 2, \dots$ , определяются как решения интегрального уравнения

$$V_n(t) \equiv \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t a(\tau) \sin \lambda_n(t-\tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^\tau \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t-\tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau. \quad (3.1.8)$$

Решение интегрального уравнения (3.1.8), согласно методам решений интегральных уравнений [89], находим по формуле

$$V_n(t) = \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (3.1.9)$$

где

$$a_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t-\tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad (3.1.10)$$

$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  – резольвента интегрального уравнения (3.1.8), итерированные ядра  $K_{n,i+1}(t, s)$  определяются по формулам

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_s^t K_n(t, \tau) K_{n,i}(\tau, s) d\tau, \quad K_n(t, s) = K_{n,1}(t, s)$$

С учетом (3.1.9) из (3.1.5) получим функцию

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x), \quad (3.1.11)$$

которая, в силу единственности решения интегрального уравнения (3.1.8), является единственным решением краевой задачи (3.1.2).

Докажем, что решение (3.1.11) краевой задачи (3.1.2) является элементом пространства  $H(Q)$ .

Непосредственным вычислением имеем

$$\int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx dt = \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right)^2 dt \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds \right)^2 + a_n^2(t) \right) dt \leq \\
&\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^T R_n^2(T,s,\lambda) ds \cdot \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^T R_n^2(T,s,\lambda) ds \leq \int_0^T \frac{a_0^2}{\lambda_n^2} e^{2\frac{a_0}{\lambda_n}(T-s)} ds = \frac{a_0}{2\lambda_n} \left( -1 + e^{2\frac{a_0}{\lambda_n}T} \right) \leq \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{2\frac{a_0}{\lambda_1}T} - 1 \right)$$

имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 V^2(t,x) dx dt &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{2\frac{a_0}{\lambda_1}T} - 1 \right) \cdot \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right) dt = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{2\frac{a_0}{\lambda_1}T} - 1 \right) T \cdot \int_0^T a_n^2(s) ds + \int_0^T a_n^2(t) dt \right) = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n^2(s) ds \left( 1 + \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{2\frac{a_0}{\lambda_1}T} - 1 \right) T \right);
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n^2(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t-\tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 dt \leq \\
&\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( \psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} + \int_0^T \frac{1}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n(T-\tau) g^2(\tau, x_0) z_n^2(x_0) d\tau \cdot \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) dt \leq \\
&\leq 3 \left( T \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{T}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + \|g(t, x_0)\|_H^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T}{\lambda_n^2} \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) \leq \\
&\leq 3T \left( \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2 \|g(t, x_0)\|_H^2 \cdot \|f(t, u(t))\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Поэтому,

$$\int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx dt \leq 2 \left( 1 + \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{\frac{2a_0 T}{\lambda_1}} - 1 \right) T \right) \cdot \int_0^T a_n^2(s) ds \leq 2 \left( 1 + \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{\frac{2a_0 T}{\lambda_1}} - 1 \right) \right) \cdot$$

$$\leq 3T \left( \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2\|g(t, x_0)\|_H^2 \cdot \|f(t, u(t))\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right) < \infty,$$

т.е.  $V(t, x) \in H(Q)$ ,  $Q=(0,1) \times (0,T)$ .

## Приближенное решение краевой задачи и его сходимость

Непосредственным вычислением имеем

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x);$$

$$V^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x);$$

$$V(t, x) - V^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)) a_n(s) ds \cdot z_n(x);$$

$$\|V(t, x) - V^m(t, x)\|_H^2 = \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)) a_n(s) ds \cdot z_n(x) \right)^2 dx dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda))^2 a_n^2(s) ds \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \int_0^T a_n^2(s) ds \right) dt;$$

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_n^m(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t, s)|;$$

Учитывая, что

$$|K_{n,i}(t,s)| \leq \frac{a_0^i}{\lambda_n^i} \cdot \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i=1,2,3,\dots,$$

имеем

$$R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} \frac{a_0^i}{\lambda_n^i} \cdot \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} = \frac{a_0}{\lambda_n} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left( \frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(i-1)!};$$

Из выражения для остаточного члена  $e^x$ :  $r_m(x) = \frac{e^{\theta x}}{(m+1)!} \cdot x^{m+1}$  следует, что

$$|r_m(x)| < e^x \cdot \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \text{ и } r_m\left(\frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n}\right) < e^{\frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n}} \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n}\right)^{m+1};$$

Следовательно,

$$R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda) \leq \frac{a_0}{\lambda_n} e^{\frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n}} \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{|\lambda| a_0 (t-s)}{\lambda_n}\right)^{m+1};$$

$$\begin{aligned} \|V(t,x) - V^m(t,x)\|_H^2 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(\frac{a_0}{\lambda_n}\right)^2 \frac{1}{((m+1)!)^2} e^{\frac{2|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}} \left(\frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}\right)^{2(m+1)} ds \cdot \int_0^T a_n^2(s) ds dt \leq \\ &\leq \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \frac{e^{\frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}}}{(m+1)!} \left(\frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}\right)^{m+1} \right)^2 T^2. \end{aligned}$$

$$\cdot 3T \left( \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2 \|g(t,x_0)\|_H^2 \cdot \|f(t,u(t))\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right) < \infty.$$

Отсюда

$$\|V(t,x) - V^m(t,x)\|_H \leq \frac{a_0}{\lambda_n} \frac{e^{\frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}}}{(m+1)!} \left(\frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}\right)^{m+1} T.$$

$$\cdot \left( 3T \left[ \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2 \|g(t,x_0)\|_H^2 \|f(t,u(t))\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right] \right)^{1/2}.$$

**Условия оптимальности и решение сопряженной краевой задачи**

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: на множестве допустимых управлений  $u(t) \in H^m(0, T)$  требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt, \quad \beta > 0,$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция желаемого состояния управляемого процесса в конечный момент времени  $T$ .

Для получения условий оптимальности составим вспомогательный функционал

$$J_1[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt + \\ + \int_0^T \int_0^1 (V_{uu} - V_{xx} - a(t)V - g(t, x)\delta(x - x_0)f[t, u(t)]) \omega dx dt$$

и вычислим его приращение:

$$\Delta J_1[u] = J_1[u + \Delta u] - J_1[u] = \int_0^1 (V + \Delta V - \xi)^2 dx + 2\beta \int_0^T |u + \Delta u| dt + \\ + \int_0^T \int_0^1 (V_{uu} + \Delta V_{uu} - V_{xx} - \Delta V_{xx} - a(t)(V + \Delta V) - g(t, x)\delta(x - x_0)f(t, u + \Delta u)) \omega dx dt - J_1(u).$$

После несложных преобразований, учитывая, что  $\omega(t, x_0(t))$  – слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} \omega_{tt} - \omega_{xx} - a(t)\omega &= 0, \quad 0 < x < 1; \quad 0 \leq t < T, \\ \omega(T, x) &= 0, \quad \omega_t(T, x) - 2(V(T, x) - \xi(x)) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \omega_x(t, 0) &= 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T; \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta J_1[u] &= \\ &= \int_0^1 (\Delta V)^2(T, x) dx - \int_0^T \left[ -2\beta(|u + \Delta u| - |u|) + g(t, x_0)(f[t, u + \Delta u] - f[t, u(t)]) \omega(t, x_0) \right] dt = \\ &= \int_0^1 (\Delta V)^2(T, x) dx - \int_0^T \Delta \Pi(\cdot, u) dt, \end{aligned}$$

где  $\Pi(\cdot, u) = f[t, u(t)]g(t, x_0)\omega(t, x_0) - 2\beta|u|$ ;



На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [22] получены следующие условия оптимальности

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) \cdot f_u(t, u(t)) - 2\beta \text{sign } u(t) = 0, \quad (3.1.13)$$

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) \cdot f_{uu}(t, u(t)) < 0, \quad (3.1.14)$$

где  $f_u(t, u(t))$ ,  $f_{uu}(t, u(t))$  – частные производные первого и второго порядков по переменной  $u$ .

Будем различать следующие случаи: когда  $u(t) > 0$  и  $u(t) < 0$  на отрезке  $[0, T]$ . Условия оптимальности (3.1.13) и (3.1.14) в этих случаях можно привести соответственно к виду

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) = 2\beta f_u^{-1}(t, u(t)), \quad (3.1.15)$$

$$f_u(t, u(t)) \left( f_u^{-1}(t, u(t)) \right)_u > 0, \quad (3.1.16)$$

и

$$g(t, x_0(t))\omega(t, x_0(t)) = -2\beta f_u^{-1}(t, u(t)), \quad (3.1.17)$$

$$f_u(t, u(t)) \left( f_u^{-1}(t, u(t)) \right)_u < 0, \quad (3.1.18)$$

Решение сопряженной краевой задачи (3.1.12) ищется в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x) \quad (3.1.19)$$

и определяются соответствующие коэффициенты Фурье

$$\omega_n(t) = \int_t^T P_n(s, t, \lambda) b_n(s) ds + b_n(t), \quad (3.1.20)$$

где  $b_n(t) = -\frac{2(V_n(t) - \xi_n)}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t)$ ;  $P_n(s, t, \lambda)$  – функция, сопряженная для функции  $R_n(t, s, \lambda)$ .

Тогда решением сопряженной краевой задачи является

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_t^T P_n(s, t, \lambda) b_n(s) ds + b_n(t) \right) z_n(x). \quad (3.1.21)$$

Докажем, что данное решение (3.1.21) является элементом пространства  $H(Q)$ .

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \omega^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2(t) dt = \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_t^T P_n(s, t, \lambda) b_n(s) ds + b_n(t) \right)^2 dt \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \int_t^T P_n(s, t, \lambda) b_n(s) ds \right)^2 + b_n^2(t) \right) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_t^T P_n^2(s, T, \lambda) ds \cdot \int_t^T b_n^2(s) ds + b_n^2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_t^T P_n^2(s, T, \lambda) ds \leq \int_t^T \frac{a_0^2}{\lambda_n^2} e^{2 \frac{|\lambda| a_0}{\lambda_n} T} ds \leq \frac{a_0^2}{\lambda_n^2} e^{2 \frac{|\lambda| a_0}{\lambda_n} T} \cdot T$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \omega^2(t, x) dx dt &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} e^{2 \frac{|\lambda| a_0}{\lambda_1} T} \cdot \int_t^T b_n^2(s) ds + b_n^2(t) \right) dt = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} e^{2 \frac{|\lambda| a_0}{\lambda_1} T} \cdot T \int_0^T b_n^2(s) ds + \int_0^T b_n^2(t) dt \right) \leq 2 \left( 1 + \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} T^2 e^{2 \frac{|\lambda| a_0}{\lambda_1} T} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n^2(s) ds. \end{aligned}$$

Оценим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n^2(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( -\frac{2(V_n(t) - \xi_n)}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t) \right)^2 dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(V_n(t) - \xi_n)^2}{\lambda_n^2} dt \leq \\ &\leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left( \int_0^T V_n^2(T) dt + T \xi_n^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{причем } V_n^2(T) &= \left( \int_0^1 V(T, x) z_n(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 V^2(T, x) dx \int_0^1 z_n^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 V^2(T, x) dx dt = \frac{1}{T} \|V(T, x)\|_H^2; \end{aligned}$$

$$\xi_n^2 = \left( \int_0^1 \xi(x) z_n(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 \xi^2(x) dx \int_0^1 z_n^2(x) dx = \int_0^T \int_0^1 \xi^2(x) dx dt = \|\xi(x)\|_H^2;$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n^2(t) dt \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left( \|V(T, x)\|_H^2 + T \|\xi(x)\|_H^2 \right) = 8 \left( \|V(T, x)\|_H^2 + T \|\xi(x)\|_H^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right);$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^T \int_0^1 \omega^2(t, x) dx dt \leq 16T^2 \left( 1 + \frac{a_0^2 T^2}{\lambda_1^2} e^{2 \frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_n}} \right).$$

$$\cdot \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \frac{1}{(m+1)!} e^{2 \frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_1}} \left( \frac{|\lambda| a_0 T}{\lambda_1} \right)^{m+1} \right)^2 \cdot \left( \|V(T, x)\|_H^2 + T \|\xi(x)\|_H^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < \infty.$$

## Приближенное решение сопряженной краевой задачи и его сходимости

Непосредственным вычислением имеем

$$\omega^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_t^T P_n^m(s, t, \lambda) b_n(s) ds + b_n(t) \right) z_n(x);$$

$$\omega(t, x) - \omega^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T \left( P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \right) b_n(s) ds \cdot z_n(x);$$

$$\|\omega(t, x) - \omega^m(t, x)\|_H^2 = \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T \left( P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \right) b_n(s) ds \cdot z_n(x) \right)^2 dx dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T \left( P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \right)^2 b_n^2(s) ds z_n^2(x) dx dt =$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \right)^2 ds \int_0^T b_n^2(s) ds dt.$$

Оценим

$$P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} \cdot |K_{n,i}(s, t)| \leq$$

$$< \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} \cdot \frac{a_0^i}{\lambda_n^i} \cdot \frac{T^{i-1}}{(i-1)!} \leq \frac{a_0}{\lambda_n} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left( \frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_n} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(i-1)!}.$$

Учитывая оценку для остаточного члена данного ряда, получим

$$\left( P_n(s, t, \lambda) - P_n^m(s, t, \lambda) \right)^2 \leq \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \right)^2 \cdot e^{\frac{2a_0 |\lambda| T}{\lambda_n}} \frac{\left( \frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_n} \right)^{2(m+1)}}{((m+1)!)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\omega(t, x) - \omega^m(t, x)\|_H^2 &\leq \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \right)^2 \cdot e^{\frac{2a_0 |\lambda| T}{\lambda_n}} \frac{\left( \frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_n} \right)^{2(m+1)}}{((m+1)!)^2} ds \int_0^T b_n^2(s) ds \right) dt \leq \\ &\leq \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \cdot \frac{e^{\frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_n}}}{(m+1)!} \left( \frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_1} \right)^{m+1} \right)^2 \cdot T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n^2(s) ds \leq \\ &\leq \left( \frac{a_0}{\lambda_n} \cdot \frac{e^{\frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_n}}}{(m+1)!} \left( \frac{a_0 |\lambda| T}{\lambda_1} \right)^{m+1} \right)^2 \cdot T^2 \cdot 8 \left( \|V(T, x)\|_H^2 + T \|\xi(x)\|_H^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

## Нелинейные интегральные уравнения и их знакоположительные решения

Согласно (3.1.15) и (3.1.21) получаем следующие соотношения:

если  $u(t) \geq 0$ , то

$$\left\{ \frac{\beta}{f_u[t, u(t)]} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( -h_n + \int_0^T B_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right) = 0, \right. \quad (3.1.22)$$

$$\left. f_u \left( \frac{1}{f_u} \right)_u > 0; \right. \quad (3.1.23)$$

если  $u(t) \geq 0$ , то

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta}{f_u[t, u(t)]} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( -h_n + \int_0^T B_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right) = 0, \\ f_u \left( \frac{1}{f_u} \right)_u < 0; \end{array} \right. \quad (3.1.24)$$

где

$$\tilde{B}_n(t) = g(t, x_0) z_n(x_0) \frac{1}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n(T-t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_t^T P_n(s, t, \lambda) \sin \lambda_n(T-s) ds \right]; \quad (3.1.26)$$

$$B_n(\tau) = g(\tau, x_0) z_n(x_0) \frac{1}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n(T-\tau) + \frac{1}{\lambda_n} \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n(s-\tau) ds \right]; \quad (3.1.27)$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \left[ \cos \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right] - \\ - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right],$$

Уравнения (3.1.22), (3.1.24) называются нелинейными интегральными уравнениями оптимального управления.

Далее будем рассматривать случай, когда  $u(t) > 0, \forall t \in [0, T]$ . Для случая  $u(t) < 0, \forall t \in [0, T]$  все вычисления аналогичны. Преобразуем интегральное уравнение (3.1.22) согласно методике работы [51]. Введем обозначение (т.е. новую искомую функцию)

$$\frac{\beta}{f_u[t, u(t)]} = p(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.28)$$

Отсюда, в силу монотонности функции  $f[t, u(t)]$  по переменной  $u(t)$ , функция  $u(t)$  определяется однозначно, т.е. существует функция  $\varphi(\cdot)$  такая, что

$$u(t) = \varphi[t, p(t), \beta] \quad (3.1.29)$$

Согласно (3.1.28) и (3.1.29) уравнение (3.1.22) перепишем в операторной форме

$$p(t) = G[p(t)], \quad (3.1.30)$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( h_n - \int_0^T B_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right). \quad (3.1.31)$$

**Лемма 3.1.1.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[p] dt &= \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left[ h_n - \int_0^T B_n(\tau) f(\cdot) d\tau \right] \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left( \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) h_n \right]^2 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \int_0^T B_n(\tau) f(\cdot) d\tau \right]^2 \right) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n^2(t) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T B_n^2(\tau) d\tau \cdot \int_0^T f^2(\cdot) d\tau \right] \right) dt; \end{aligned}$$

Оценим

$$\begin{aligned} 1) \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n^2(t) dt &\leq \left\{ \tilde{B}_n^2(t) = g^2(t, x_0) z_n^2(x_0) \frac{1}{\lambda_n^2} \left[ \sin \lambda_n (T - \lambda) + \int_t^T P_n \sin \lambda_n (T - s) ds \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} g^2(t, x_0) z_n^2(x_0) \frac{1}{\lambda_n^2} 2 \left[ \sin^2 \lambda_n (T - \lambda) + \int_0^T P_n^2(s, t, \lambda) ds \int_0^T \sin^2 \lambda_n (T - s) ds \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} g^2(t, x_0) 2 \frac{1}{\lambda_n^2} 2 \left[ 1 + T^2 \frac{a_n^2}{\lambda_n^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_n}} \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} g^2(t, x_0) dt \cdot 4 \left[ 1 + T^2 \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right] \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < \infty; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n - \psi_{1n} \left[ \cos \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left[ \sin \lambda_n T + \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right] \right)^2 \leq \\ &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 2 \left[ 1 + \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) \cdot \int_0^T \cos^2 \lambda_n s ds \right] + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} 2 \left[ 1 + \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) ds \int_0^T \sin^2 \lambda_n s ds \right] \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + 2 \left( \psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \right) \left[ 1 + T \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) ds \right] \right) \leq \\
&\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \|\xi(x)\|_H^2 + 2 \left( \|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 \right) \left[ 1 + T^2 \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right] \right); \\
3) \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T B_n^2(\tau) d\tau \cdot \int_0^T f^2(\cdot) d\tau \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T B_n^2(\tau) d\tau \cdot \|f(\cdot)\|_H^2 \leq \\
&\leq \|f(\cdot)\|_H^2 \cdot \int_0^T g^2(\tau, x_0) d\tau 4 \left( 1 + T^2 \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} \cdot e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

**Лемма 3.1.2.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad (3.1.32)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H \quad (3.1.33)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = C f_0 \varphi_0(\beta) < 1,$$

где  $C = 4 \int_0^T g^2(t, x_0) dt \cdot \left( 1 + \frac{T^2 a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)$ , оператор  $G[\cdot]$  является сжимающим.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\|G[p] - G[\bar{p}]\|_H^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( h_n - \int_0^T B_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]) d\tau \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( h_n - \int_0^T B_n(\tau) f(\tau, \varphi[\tau, \bar{p}(\tau), \beta]) d\tau \right) \right\|_H^2 = \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \left( \int_0^T B_n(\tau) (f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})) d\tau \right) \right\|_H^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n(t) \int_0^T B_n(\tau) (f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})) d\tau \right)^2 dt \leq \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n^2(t) dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T B_n^2(\tau) d\tau \int_0^T [f(\cdot, p) - f(\cdot, \bar{p})]^2 d\tau \leq \\
&\leq \left[ \int_0^T g^2(t, x_0) dt \cdot 4 \left( 1 + T^2 \frac{a_0^2}{\lambda_1^2} \cdot e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^2 \cdot \\
&\cdot \|f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta) - f(\tau, \varphi(\tau, \bar{p}(\tau), \beta))\|_H^2 \leq \\
&\leq c^2 f_0^2 \|\varphi(\tau, p(\tau), \beta) - \varphi(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)\|_H^2 \leq c^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|p(\tau) - \bar{p}(\tau)\|_H^2; \\
&\|G[p] - G[\bar{p}]\|_H < \gamma \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H, \text{ где } \gamma = C f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \\
&C = 4 \int_0^T g^2(t, x_0) dt \cdot \left( 1 + \frac{T^2 a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda|a_0 T}{\lambda_1}} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right).
\end{aligned}$$

**Теорема 3.1.1.** При выполнении условий (3.1.32), (3.1.33) операторное уравнение (3.1.30) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 3.1.1 следует из лемм 3.1.1-3.1.2 и из известной теоремы [74] о принципе сжимающих отображений.

Решение операторного уравнения (3.1.30) может быть найдено методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\|\tilde{p}(t) - p_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (3.1.34)$$

где  $p_0(t) \in H(0, T)$  – произвольный элемент.

Далее, подставляя найденное  $\tilde{p}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$  в (3.1.29) находим оптимальное управление

$$\tilde{u}(t) = \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]. \quad (3.1.35)$$



Подставляя оптимальное управление  $\tilde{u}(t)$  в (3.1.11) находим оптимальный процесс  $\tilde{V}(t, x)$

$$\tilde{V}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \tilde{a}_n(s) ds + \tilde{a}_n(t) \right) z_n(x), \quad (3.1.36)$$

где  $\tilde{a}_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, \tilde{u}(\tau)] d\tau,$

и затем согласно (3.1.1) вычисляем минимальное значение функционала  $J[\tilde{u}(t)]$

$$J[\tilde{u}(t)] = \int_0^1 [\tilde{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |\tilde{u}(t)| dt, \quad (3.1.37)$$

Таким образом, найденная тройка  $(\tilde{u}(t), \tilde{V}(t, x), J[\tilde{u}(t)])$  определяет решение исходной задачи нелинейной оптимизации.

### Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации

Для практического использования вместо точного решения интегрального уравнения (3.1.22) находят приближенное решение  $p_k(t)$ , удовлетворяющее оценке (3.1.34). Соответственно, согласно (3.1.35), находим  $k$ -е приближение оптимального управления

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta],$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{u}(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H \quad (3.1.38)$$

По найденному  $u_k(t)$ , согласно формуле (3.1.11), находим  $k$ -е приближение оптимального процесса

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_{n,k}(s) ds + a_{n,k}(t) \right) z_n(x),$$

где  $a_{n,k}(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u_k(\tau)] d\tau.$

Докажем, что данное  $k$ -е приближение оптимального процесса удовлетворяет следующей оценке

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{V}(t, x) - V_k(t, x) \right\|_H^2 \leq \\ & \leq 4T \left( 1 + \frac{a_0}{2\lambda_1} \left( e^{\frac{2a_0 T}{\lambda_1}} - 1 \right) \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left\| g(t, x_0) \right\|_H^2 f_0^2 \left\| \tilde{u}(t) - u_k(t) \right\|_H^2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{V}(t, x) - V_k(t, x) \right\|_H^2 = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, \tilde{u}(\tau)] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left( \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) ds + \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) \right) d\tau - \int_0^t g(\tau, x_0) z_n(x_0) f[\tau, u_k(\tau)] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left. \left( \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) ds + \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) \right) d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t g(\tau, x_0) z_n(x_0) \left( f[\tau, \tilde{u}(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)] \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left. \left( \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) ds + \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) \right) d\tau \right\}^2 dt \leq \\ & \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( \int_{\tau}^T R_n^2(t, s, \lambda) \frac{1}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n(s - \tau) ds + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n(t - \tau) \right) \cdot \\ & \cdot g^2(\tau, x_0) z_n^2(x_0) d\tau dt \left\| f[\tau, \tilde{u}(\tau)] - f[\tau, u_k(\tau)] \right\|_H^2, \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (3.1.39).

После определения  $u_k(t)$  и  $V_k(t, x)$ , согласно формуле (2.1.13), вычисляем  $k$ -е приближение минимального значения функционала

$$J[u_k(t)] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u_k(t)| dt$$

Докажем, что данное  $k$ -е приближение функционала удовлетворяет следующей оценке

$$\left| J[\tilde{u}(t)] - J[u_k(t)] \right| \leq C_1 \left\| \tilde{V}(T, x) - V_k(T, x) \right\|_H + C_2 \left\| \tilde{u}(t) - u_k(t) \right\|_H < \infty, \quad (3.1.40)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – положительные постоянные.

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned}
& \left| J[\tilde{u}(t)] - J[u_k(t)] \right| = \\
& = \left| \int_0^1 \left\{ \left[ \tilde{V}(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[ V_k(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx + 2\beta \int_0^T \left( |\tilde{u}(t)| - |u_k(t)| \right) dt \right| \leq \\
& \leq \left| \int_0^1 \left\{ \left[ \tilde{V}(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x) \right] \left[ \tilde{V}(T, x) - V_k(T, x) \right] \right\} dx \right| + 2\beta \int_0^T \left( |\tilde{u}(t) - u_k(t)| \right) dt \leq \\
& \leq \left| \int_0^1 \left\{ \left[ \tilde{V}(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x) \right] \left[ \tilde{V}(T, x) - V_k(T, x) \right] \right\} dx \right| + 2\beta\sqrt{T} \left( \int_0^T |\tilde{u}(t) - u_k(t)| dt \right) \leq \\
& \leq \left\| \tilde{V}(T, x) + V_k(T, x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| \tilde{V}(T, x) - V_k(T, x) \right\|_H + 2\beta\sqrt{T} \left\| \tilde{u}(t) - u_k(t) \right\|_H,
\end{aligned}$$

откуда следует оценка (3.1.40).

Как следует из оценок (3.1.38)–(3.1.40), приближенное решение  $(u_k(t), V_k(t, x), J[u_k(t)])$  задачи нелинейной оптимизации сходится при  $k \rightarrow \infty$  к точному решению  $(\tilde{u}(t), \tilde{V}(t, x), J[\tilde{u}(t)])$ .

### 3.2. Решение задачи оптимизации при наличии нескольких подвижных точечных управлений

В этом разделе исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при минимизации кусочно-линейного функционала в случае, когда имеется несколько внешних подвижных точечных источников. Найдены условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации и разработан алгоритм, позволяющий довести решение задачи до численных расчетов.

#### Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Пусть управляемый процесс  $V(t, x)$  в области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  удовлетворяет краевой задаче [84]

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.2.1)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.2.2)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.2.3)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака; точки приложений внешних воздействий  $f_k[u_k(t)] \in H(0, T)$ , каждая из которых нелинейно зависит от функции  $u_k(t) \in H(0, T)$ , причем

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \neq 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.2.4)$$

$\mu_k$  изменяются по заданному закону  $\mu_k = \mu_k(t)$ ,  $0 < \mu_k(t) < 1$ ;  $\psi_1(x) \in H(0, 1)$ ,  $\psi_2(x) \in H(0, 1)$  – заданные функции начального состояния колебательного процесса;  $H(X)$  – гильбертово пространство функций, определенных на множестве  $X$ ; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени.

Краевая задача (3.2.1) – (3.2.3) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (3.2.5)$$

которое удовлетворяет интегральному тождеству [75]

$$\int_0^1 (V_t \Phi)_{t_1}^{t_2} dx = \iint_{t_1 0}^{t_2 1} \left[ V_t \Phi_t - V_x \Phi_x + \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k[u_k(t)] \Phi \right] dx dt - \alpha \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, 1) V(t, 1) dt$$

для любых моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$ ), и для любой функции  $\Phi(t, x) \in C^{1,1}[Q]$ , а также начальным условиям (3.2.2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi_1(x)] \Phi_0(x) dx = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V_t(t, x) - \psi_2(x)] \Phi_1(x) dx = 0,$$

выполняются для любых функций  $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$ ,  $\Phi_1(x) \in H(0, 1)$ .

**Лемма 3.2.1.**  $V(t, x)$  является элементом пространства  $H(Q)$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right]^2 \leq \\ &\leq 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{1n}^2 \cos^2 \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 \sin^2 \lambda_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n(t - \tau) d\tau \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] \right)^2 d\tau \right] dt \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T (z_n(\mu_1) f_1(u_1) + \dots + z_n(\mu_m) f_m(u_m))^2 d\tau \right] \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle \psi_2, z_n \rangle|^2 + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} 2m \int_0^T \sum_{k=1}^m f_k^2(u_k) d\tau \right] \leq \\ &\leq 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 \|z_n\|_H^2 + 2Tm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \|f(\bar{u})\|_{H^m(0, T)}^2 \right] = \\ &= 3T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \|\psi_2(x)\|_{H(0, 1)}^2 + 2Tm \|f(t, \bar{u}(t))\|_{H^m(0, T)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \leq \\ &= 3T \left[ \|\psi_1(x)\|_{H(0, 1)}^2 + \left( \|\psi_2(x)\|_{H(0, 1)}^2 + 2Tm \|f(t, \bar{u}(t))\|_{H^m(0, T)}^2 \right) \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) \right] < \infty, \end{aligned}$$

t.e.  $V(t, x) \in H(Q)$ .

## Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности

Векторное управление  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in H^m(0, T)$ , где  $H^n = H \times H \times \dots \times H$  – декартово произведение пространств  $H$ , для которого краевая задача (3.2.1) – (3.2.2) имеет единственное обобщенное решение, назовем допустимым управлением. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: на множестве допустимых управлений  $u(t) \in H^m(0, T)$  требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt, \quad \beta > 0, \quad (3.2.6)$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция желаемого состояния управляемого процесса в конечный момент времени  $T$ .

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [22] получено, что оптимальное управление  $u(t)$  удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$2\beta \left( \frac{\partial f_k[u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k = \omega[t, \mu_k(t)], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left( \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \right) \text{sign } u_k(t) > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (3.2.8)$$

где

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T - t) \left[ \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau - h_n \right] z_n(x), \quad (3.2.9)$$

$$G_n(t, \mu_k(t)) = \frac{1}{\lambda_n} z_n[\mu_k(t)] \sin \lambda_n (T - t),$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n T.$$

## Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Согласно (3.2.7) и (3.2.9) относительно оптимального управления  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  получим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \beta \left( \frac{\partial f_k[u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n[\tau, \mu_i(\tau)] f_i[u_i(\tau)] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_k(t)] h_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (3.2.8).

Вопросы разрешимости задачи (3.2.10), (3.2.8) могут быть исследованы по методике работы [51]. В наборе  $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ , функции  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем  $u_i(t) \geq 0$  (или  $u_i(t) \leq 0$ ),  $\forall t \in [0; T]$ . Решение интегрального уравнения Фредгольма обладает свойством непродолжаемости решения [66]. Поэтому решением системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма (3.2.10) будет лишь вектор-функция, каждая компонента которой является функцией только одного знака, т.е. либо положительного, либо отрицательного при всех  $t \in [0, T]$ . Количество всех наборов, где каждая функция определенного знака (либо больше нуля, либо меньше нуля), в промежутке  $[0, T]$ , равно  $2^m$ .

Для определенности изложение проведем для набора вида

$$\{u_1^+(t), \dots, u_s^+(t), u_{s+1}^-(t), \dots, u_m^-(t)\}, \quad 1 \leq s \leq m. \quad (3.2.11)$$

В этом случае система (3.2.10) приводится к виду

$$\begin{aligned} \beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, u_k(\tau)] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = 1, \dots, s; \end{aligned} \quad (3.2.11_1)$$

$$\begin{aligned} -\beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = s + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.2.11_2)$$

а система условий (3.2.8) переходит к следующей системе условий

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left[ \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \right]^{-1} \right) > 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad (3.2.12_1)$$

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \left[ \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \right]^{-1} \right) < 0, \quad k = s + 1, \dots, m. \quad (3.2.12_2)$$

### О разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений

Для построения решения этой системы сначала, согласно методике работы [51], введем обозначения

$$\beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^+(t), \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.2.13_+)$$

$$-\beta \left( \frac{\partial f_i[t, u_i(t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^-(t), \quad i = s + 1, \dots, m. \quad (3.2.13_-)$$

Согласно (3.2.12<sub>1</sub>) из (3.2.13<sub>+</sub>) функции  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , определяются однозначно, т.е. имеют место равенства

$$u_i^+(t) = \varphi_i^+[t, p_i^+(t), \beta], \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.2.14_+)$$

Согласно (3.2.12<sub>2</sub>) из (3.2.13<sub>-</sub>) аналогичным образом находим функции

$$u_i^-(t) = \varphi_i^-[t, p_i^-(t), \beta], \quad i = s + 1, \dots, m. \quad (3.2.14_-)$$

В формулах (3.2.14<sub>+</sub>)–(3.2.14<sub>-</sub>) функции  $\varphi_i^+(\cdot)$  и  $\varphi_i^-(\cdot)$  являются известными функциями.

С учетом (3.2.13<sub>+</sub>)–(3.2.14<sub>-</sub>) систему нелинейных интегральных уравнений (3.2.11<sub>1</sub>)–(3.2.11<sub>2</sub>) можно переписать в следующем виде

$$p_i^+(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \left( \sum_{k=1}^s G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \varphi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=s+1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \varphi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{1, s};$$



$$p_i^-(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \left( \sum_{k=1}^s G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \varphi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=s+1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \varphi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{s+1, m}$$

или в операторной форме

$$\bar{p} = G[\bar{p}], \quad (3.2.15)$$

где

$$G[\bar{p}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \bar{\mu}(t)] \left[ h_n - \int_0^T G_n^*(\tau, \bar{\mu}(\tau)) \bar{f}[\tau, \bar{\varphi}(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)] d\tau \right], \\ \bar{p}(t) = \{p^+(t), p^-(t)\} = \{p_1^+(t), \dots, p_s^+(t), p_{s+1}^-(t), \dots, p_m^-(t)\}, \\ G[\bar{p}] = \{G_1[p_1], \dots, G_m[p_m]\}, \\ G_n[t, \bar{\mu}(t)] = \{G_n[t, \mu^+(t)], G_n[t, \mu^-(t)]\} = \\ = \{G_n[t, \mu_1(t)], \dots, G_n[t, \mu_s(t)], G_n[t, \mu_{s+1}(t)], \dots, G_n[t, \mu_m(t)]\}, \\ \bar{f}[t, \bar{\varphi}(t, \bar{p}(t), \beta)] = \{f[t, \varphi^+(t, p^+(t), \beta)], f[t, \varphi^-(t, p^-(t), \beta)]\} = \\ = \begin{cases} f_1[t, \varphi_1^+(t, p_1^+(t), \beta)], \dots, f_s[t, \varphi_s^+(t, p_s^+(t), \beta)], \\ f_{s+1}[t, \varphi_{s+1}^-(t, p_{s+1}^-(t), \beta)], \dots, f_m[t, \varphi_m^-(t, p_m^-(t), \beta)] \end{cases},$$

\* – знак транспонирования.

**Лемма 3.2.2.** Оператор  $G[\cdot]$  отображает пространство  $H$  в себя.

**Доказательство.** Согласно (3.2.4) функции  $p_k^+(t)$  и  $p_k^-(t)$  ограничены и являются элементами пространства  $H(0, T)$ .

$$\|\bar{G}[\bar{p}]\|_{H^m}^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^m |G_i[p_i]|^2 dt =$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, \mu_i(t)) \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, \mu_i(t)) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 dt \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[ h_n^2 + \left( \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right)^2 \right] dt \leq \\
&\leq 4T \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left[ \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + \left( \int_0^T (G_n(\mu_1) f_1 + \dots + G_n(\mu_m) f_m) d\tau \right)^2 \right] \leq \\
&\leq 4T \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + Tm \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n^2(\tau, \mu_k(\tau)) f_k^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right) \leq \\
&\leq 12Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \xi_n^2 + \psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2} \psi_{2n}^2 + Tm \frac{2}{\lambda_n^2} \int_0^T \sum_{k=1}^m f_k^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right) \leq \\
&\leq 12Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right).
\end{aligned}$$

$$\cdot \left[ \|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2 + \|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left( \|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2Tm \|f\|_{H(0,1)}^2 \right) \right] < \infty.$$

**Лемма 3.2.3.** Пусть функции  $f[t, u(t)]$  и  $\varphi[t, p(t), \beta]$  удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, \bar{u}(t)] - f[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^m} \leq f_0 \|\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)\|_H, \quad f_0 > 0$$

$$\|\varphi[t, \bar{p}(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}(t) - \tilde{p}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор  $G[\cdot]$  является сжимающим.

**Доказательство**

$$G[p_i] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, p_k(\tau), \beta)] d\tau \right], \quad i = \overline{1, m};$$

$$\bar{G}[\bar{p}] = \begin{bmatrix} G[p_1] \\ \dots \\ G[p_m] \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{bmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, p_k(\tau), \beta)] d\tau \right];$$

$$\|\bar{G}[\bar{p}]\|_{H^m}^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^m |G_i[p_i]|^2 dt = \sum_{i=1}^m \int_0^T |G[p_i]|^2 dt;$$

$$\begin{aligned} \bar{G}[\bar{p}] - \bar{G}[\tilde{p}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{bmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] d\tau \right] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{bmatrix} \left[ h_n - \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] d\tau \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n[t, \mu_1(t)] \\ \dots \\ G_n[t, \mu_m(t)] \end{bmatrix} \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n(\tau, \mu_k(\tau)) \cdot \\ &\quad \cdot \left( f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] \right) d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{G}[\bar{p}] - \bar{G}[\tilde{p}]\|_{H^m}^2 &= \int_0^T \sum_{i=1}^m \left| \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] \right) d\tau \right|^2 dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2[t, \mu_i(t)] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] \left( f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] \right) \right)^2 \leq \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T m \frac{2}{\lambda_n^2} \sum_{k=1}^m \left( f_k[\tau, \varphi(\tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta)] - f_k[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}_k(\tau), \beta)] \right)^2 d\tau dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T^2 m^2 4 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \int_0^T \sum_{k=1}^m \left( f_k \left[ \tau, \varphi \left( \tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta \right) \right] - f_k \left[ \tau, \varphi \left( \tau, \bar{p}_k(\tau), \beta \right) \right] \right)^2 d\tau = \\
&= 4T^2 m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left\| \bar{f} \left[ \tau, \varphi \left( \tau, \tilde{p}_k(\tau), \beta \right) \right] - \bar{f} \left[ \tau, \varphi \left( \tau, \bar{p}_k(\tau), \beta \right) \right] \right\|_{H^m}^2 \leq \\
&\leq 4T^2 m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \left\| \tilde{p}_k(t) - \bar{p}_k(t) \right\|_{H^m}^2.
\end{aligned}$$

**Теорема 3.2.1.** Операторное уравнение (3.2.15) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из лемм 3.2.2, 3.2.3 и из того, что  $H(0, T)$  является полным метрическим пространством.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам [74]

$$\bar{p}^{-n}(t) = G \left[ \bar{p}^{-n-1}(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.2.16)$$

где  $\bar{p}^{-0}(t) = (p_1^0(t), \dots, p_m^0(t))$  – произвольный элемент пространства  $H^m(0, T)$ .

Точное решение  $\bar{p}_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^{-n}(t)$  и удовлетворяет оценке

$$\left\| \bar{p}_0(t) - \bar{p}^{-n}(t) \right\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \left\| \bar{G} \left[ \bar{p}^{-0}(t) \right] - p^0(t) \right\|_{H^m}, \quad (3.2.17)$$

где

$$\gamma = 2Tm \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1.$$

### Оптимальное управление и сходимость его приближений

Пусть

$$\bar{p}(t) = \{ p_1(t), \dots, p_s(t), p_{s+1}(t), \dots, p_m(t) \}, \quad (3.2.18)$$

$$\bar{p}^n(t) = \{ p_1^n(t), \dots, p_s^n(t), p_{s+1}^n(t), \dots, p_m^n(t) \} \quad (3.2.19)$$

– соответственно точное и приближенное решения системы нелинейных интегральных уравнений (3.2.15). Подставляя эти решения в (3.2.14<sub>+</sub>) и (3.2.14<sub>-</sub>) находим оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1^+(t) \\ \dots \\ u_s^+(t) \\ u_{s+1}^-(t) \\ \dots \\ u_m^-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[t, p_1(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_s(t), \beta] \\ \varphi[t, p_{s+1}(t), \beta] \\ \dots \\ \varphi[t, p_m(t), \beta] \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

и его приближения

$$\bar{u}^n(t) = \bar{\varphi}[t, p^n(t), \beta]. \quad (3.2.21)$$

При надлежащем выборе параметра  $\beta$  оптимальное управление (3.2.20) является решением системы нелинейных интегральных уравнений (3.2.11<sub>1</sub>)–(3.2.11<sub>2</sub>) и удовлетворяет дополнительным условиям (3.2.12<sub>1</sub>)–(3.2.12<sub>2</sub>).

Учитывая, что функция  $\varphi(\cdot)$  удовлетворяет условию Липшица, имеем:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^n(t)\|_{H^m} &= \|\varphi[t, \bar{p}^0(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}^n(t), \beta]\|_{H^m} \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \|\bar{p}^0(t) - \bar{p}^n(t)\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\bar{G}(\bar{p}^0(t)) - \bar{p}^0(t)\|_{H^m} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

из которого следует сходимость приближенного оптимального управления.

### Оптимальный процесс и сходимость его приближений.

При подстановке оптимального управления (3.2.20) в (3.2.5) получим оптимальный процесс

$$\begin{aligned} V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n(\mu_i(\tau) f_i[\tau, u_i(\tau)] d\tau \right) z_n(x), \quad (3.2.22) \end{aligned}$$

$$V^k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{1n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] f_i[\tau, u_i^k(\tau)] d\tau \right) z_n(x) \quad (3.2.23)$$

Поскольку

$$V(t, x) - V^k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) d\tau z_n(x), \text{ то}$$

из соотношения

$$\begin{aligned} \|V(t, x) - V^k(t, x)\|_H^2 &= \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) d\tau z_n(x) \right]^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \sin^2 \lambda_n (t - \tau) d\tau \int_0^T \left( \sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]) \right)^2 d\tau dt \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_n^2} T 2m \int_0^T \sum_{i=1}^m (f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)])^2 d\tau = \\ &= \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) T 2m \|f[\tau, \bar{u}(\tau)] - f[\tau, u^k(\tau)]\|_{H^m}^2 \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) 2m T f_0^2 \|\bar{u}(\tau) - u^k(\tau)\|_{H^m}^2 \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

следует сходимость приближенного решения к точному.

### Минимальное значение функционала и сходимость его приближенных значений

Согласно формулам (3.2.6), (3.2.20)–(3.2.22) минимальное значение функционала  $J[u(t)]$  и его приближенное значение находим по формулам:

$$J[\bar{u}(t)] = \int_0^1 [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |\bar{u}_k(t)| dt \quad (3.2.24)$$

$$J[u^n(t)] = \int_0^1 [V^n(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |u_k^n(t)| dt \quad (3.2.25)$$

Непосредственным вычислением имеем

$$\begin{aligned}
|J[\bar{u}] - J[u^n]| &= \left| \int_0^1 \left\{ [\bar{V}(T, x) - \xi(x)]^2 - [V^n(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m (|\bar{u}_k(t)| - |u^n(t)|) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \left\{ [\bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x)] [\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)] \right\} dx + 2\beta \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)| \right) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \langle \bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x), \bar{V}(T, x) - V^n(T, x) \rangle_H \right| + 2\beta \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)| \right) dt.
\end{aligned}$$

Отсюда учитывая, что

$$\begin{aligned}
1) \quad & \left| \langle \bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x), \bar{V}(T, x) - V^n(T, x) \rangle \right| \leq \\
& \leq \|\bar{V}(T, x) + V^n(T, x) - 2\xi(x)\| \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H \leq \\
& \leq \left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H ; \\
2) \quad & \int_0^T \sum_{k=1}^m |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)| dt = \sum_{k=1}^m \int_0^T |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)| dt \leq \left( \sum_{k=1}^m 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k=1}^m \left( \int_0^T |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sqrt{m} \left( \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_0^T |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{mT} \left( \sum_{k=1}^m \int_0^T |\bar{u}_k(t) - u_k^n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

имеем неравенство

$$\begin{aligned}
|J[\bar{u}] - J[u^n]| &\leq \left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \|\bar{V}(T, x) - V^n(T, x)\|_H + \\
& + 2\beta \sqrt{mT} \|\bar{u}(t) - u^n(t)\|_{H^m} \leq K_0 \sqrt{M_1 m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} Tf_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m} + \\
& + 2\beta \sqrt{mT} \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m} = \\
& = \left( K_0 \sqrt{M_1 m \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} Tf_0 + 2\beta \sqrt{mT} \right) \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p^0(t)] - p^0(t)\|_{H^m},
\end{aligned}$$

где

$$K_0 = \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|V^n(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \leq 2\left( \|\bar{V}(T, x)\|_H + \|\xi(x)\|_H \right),$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала при  $n \rightarrow \infty$ .

### **Выводы**

В третьей главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний в случае, когда колебание происходит под воздействием одного и нескольких подвижных точечных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления и минимизируется кусочно-линейный функционал.

Установлено, что при минимизации интегрального функционала, кусочно-линейного по каждому из управлений, векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительному условию в виде системы дифференциальных неравенств. Найдены достаточные условия существования решения задачи оптимизации. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимость по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

В силу нелинейности, подобного рода задачи оптимального управления мало изучены. Из-за трудностей, возникающих при исследовании нелинейных задач оптимального управления, для рассматриваемых в данной главе задач получены лишь отдельные результаты, например условия оптимальности, редукция к конечномерной задаче, оценки для функционалов и т.д. Однако, полученные результаты создают предпосылки для развития методов исследований нелинейных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.



## **ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

В диссертации исследованы вопросы однозначной разрешимости задач оптимального управления упругими колебаниями системы в случае, когда воздействие одного или нескольких подвижных источников описывается нелинейными функциями от управления.

Установлено, что при минимизации интегрального квадратичного или кусочно-линейного функционалов, векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительному условию в виде системы дифференциальных неравенств. Найдены достаточные условия существования решения задачи оптимизации. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации. Приведенный численный пример подтверждает теоретические выводы.

Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами для рассматриваемого класса задач. Исследования проводились согласно методу принципа максимума для систем с распределенными параметрами. Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии подвижных точечных источников является конструктивным и может быть использован при решении прикладных и производственных задач, связанных с подвижным управлением волновых процессов.

С другой стороны, полученные результаты имеют большую теоретическую значимость и представляют интерес для исследований задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авдонин С.А.** Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент [Текст] /С.А. Авдонин, С.А. Иванов. – УМК ВО. – Киев, 1989. – 244с.
2. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами [Текст] / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. **Аргучинцев А. В.** К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях / А.В. Аргучинцев // Модели и методы исследования операций. — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. — С. 50
4. **Аргучинцев А. В.** Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем [Текст]: дис..., д-ра физ.-мат. наук: 05.13.01 / А.В. Аргучинцев – Иркутск, 2004. – 237 с.
5. **Арман Ж.Л.** Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций [Текст] /Ж.Л. Арман. – М.: Мир, 1977. – 142 с.
6. **Асанова Ж.К.** Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление процессом теплопередачи [Текст]: автореф.дис..., канд.физ.-мат.наук: 01.01.02 / Ж.К. Асанова. – Ош, 2012. – 18с.
7. **Баатов А.К.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов[Текст] / А.К.Баатов // Вестн.Кыргызско-Российский Славянский Университет. – Бишкек, 2014. – С.153–157.
8. **Баатов А.К.** Приближенные решения задач нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст]: автореф.дис..., канд.физ.-мат.наук: 01.01.02 / А.К. Баатов. – Бишкек, 2014. – 26с.
9. **Будак Б.М.** Кратные интегралы и ряды[Текст] /Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967. – 607 с.

10. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
11. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
12. **Бутковский А.Г.** Управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор / А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №11. – С. 16–65.
13. **Бутковский А.Г.** Характеристики систем с распределенными параметрами. [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
14. **Бутковский А.Г.** Управление распределенными системами путем перемещения источника [Текст] / А.Г. Бутковский, Ю.В. Даринский, Л.М. Пустыльников // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №5. – С.
15. **Бутковский А.Г.** Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
16. **Васильева А. Б.** Интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 156 с.
17. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
18. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
19. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
20. **Егоров А.И.** Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопередачи [Текст] / А.И. Егоров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. Т. 12, №3. – С. 791–799.
21. **Егоров А.И.** О приближенном решении одной задачи оптимального управления [Текст] / А.И. Егоров, Р. Рафатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972, Т.12, №4. – С.943–956.

22. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами[Текст]/ А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
23. **Егоров А.И.** Оптимальное управление линейными системами[Текст]/А.И. Егоров. – Киев: Выща школа, Головное изд-во, 1988. – 278 с.
24. **Егоров А.И.** Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии[Текст]/А.И. Егоров, Р. Рафатов – Фрунзе, 1990. – 336 с.
25. **Егоров А.И.** Основы теории управления[Текст] /А.И. Егоров. – М.: Физматлит., 2004. – 504 с.
26. **Ильин В.А.** Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны[Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев //Докл. РАН. – 2005. Т.402, №2. – С.163-169.
27. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. 2000. – Т.36, №11, – С.1513–1528.
28. **Ильин В.А.** Граничное управление смещением на одном конце струны при наличии нелокального граничного условия одного из четырех типов и его оптимизация / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. 2008. – Т.44, №11, – С.1487–1498.
29. **Imanaliev M.** On Singularities of Piecewise – Linear Functional Minimization Problem for system with Distributed Parameters. / M. Imanaliev, A. Kerimbekov //Actual Problems of Control Theory, Topology and Operator Equations. – Aachen: Shaker Verlag, 2009. – P. 21–26.
30. **Карабакиров К.Р.** Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при минимизации кусочно-линейного функционала[Текст] / К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ. 2012. Т.12. №10. С. 158–160.
31. **Карабакиров К.Р.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями[Текст] / К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ. 2014. Т.14. №1. С. 161–165.

32. **Карабакиров К.Р.** Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении[Текст] / К.Р. Карабакиров // «Поиск». Научный журнал–приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана» Республики Казахстан. Серия естественных и технических наук. №3/2014. С.140–146.
33. **Карабакиров К.Р.** Вывод нелинейного интегрального уравнения оптимального управления в одной задаче минимизации кусочно-линейного функционала[Текст] / К.Р. Карабакиров, Ж.К. Асанова // Вестник КГУ им. И.Арабаева. Серия: физика, математика, информатика. №3 (2014). С.285–289. Третья республиканская научная конференция, посвященная памяти профессора Р.Усубакунова.
34. **Карабакиров К.Р.** Решение задачи нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами при подвижных точечных управлениях[Текст] / К.Р. Карабакиров, Ж.К. Асанова // Тез. докл. второй международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 20–летию образования КРСУ. – «Иссык-Куль Аврора», 5–7 сентября 2013 г. – С.47.
35. **Керимбеков А.** Точечное и граничное управления волновым процессом [Текст]/А.Керимбеков //Вопросы качественного исследования и приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе, 1981. – С. 59–62.
36. **Керимбеков А.** Точечное управление волновым процессом описываемым системой телеграфных уравнений [Текст] /А.Керимбеков //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе, 1982, вып. 15. – С.309–319.
37. **Керимбеков А.** Точечная управляемость электромагнитных колебаний[Текст]: тез.докл. /А.Керимбеков //Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Актуальные проблемы моделирования и управления систем с распределенными параметрами» – Киев, 1987. – С.75.
38. **Керимбеков А.** Точечная управляемость в одной задаче успокоения колебаний[Текст]: тез.докл. / А.Керимбеков // Тезисы докладов конференции

математиков и механиков Киргизии, посвященный 70-летию Октября. – Фрунзе: Илим, 1987. – С. 41.

39. **Керимбеков А.** Точечная управляемость в задачах быстрогодействия [Текст] / А. Керимбеков // Оптимальный синтез в системах с распределенными параметрами. – Фрунзе, 1989. – С. 118–124.

40. **Керимбеков А.** Математические методы оптимального управления электромагнитными колебаниями [Текст] / А. Керимбеков – Бишкек: Изд-во КГПУ им. И. Арабаева, 1997. – 112 с.

41. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление упругими колебаниями [Текст] / А.К. Керимбеков, А.К. Баетов, К.Р. Карабакиров, С.Б. Доулбекова // Тез. докл. международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения» – Астана, 2012. – С. 155–156.

42. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Вестник КГУ им. Ж. Баласагына. 2011. Спец. вып. С. 71–75. IV Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», г. Бишкек, 13.09.2011 г.

43. **Керимбеков А.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при подвижном точечном управлении [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ. 2012. Т. 12. №10. С. 161–164.

44. **Керимбеков А.** Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при минимизации интегрального квадратичного функционала [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Вестник КГУСТА. 2012. №2(36). С. 143–145. Международная научно-практическая конференция «Информационные и инновационные технологии в образовании: состояние, проблемы и перспективы», г. Бишкек, 13.09.2012 г.

45. **Kerimbekov A.** Approximate solution of piecewise-linear functional minimization task with the movable point control of oscillations processes / A. Kerimbekov, K. Karabakirov // Abstracts of V Congress of the Turkic World

Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Vorubaev. – Bishkek: Mathematical Society of Kyrgyz, 2014. P.319.

46. **Керимбекова А.** Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами [Текст] / А. Керимбеков // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2000. – №2. – С. 30–35.

47. **Керимбеков А.** Приближенное решение нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов [Текст] / А. Керимбеков // Проблемы автоматизации и управления. – Бишкек, 2001. – С. 58–65.

48. **Керимбеков А.** Непрерывное отображение в нелинейной задаче оптимизации тепловых процессов [Текст] / А. Керимбеков // Вестник КГНУ–Бишкек, 2001. – Вып. 7. – С. 26–30.

49. **Kerimbekov A.** On solvability of nonlinear optimization problem for heat processes / A. Kerimbekov // Generalized solutions in control problems. Proceeding of the International Symposium. – Pereslavl-Zalessky, Russia, August 27–31, 2002. Abstract of talks. Research Center of Control Processes, Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, 2002. – P. 117–120.

50. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст] / А. Керимбеков, Г.М. Мааткабылова // Вестн. КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2006. Т.3 –С.54–58.

51. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами [Текст]: дис..., д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. Керимбеков – Бишкек, 2003. – 224 с.

52. **Керимбеков А.** Решение задач нелинейной оптимизации тепловых и диффузионных процессов методом обобщенного управления [Текст] / А. Керимбеков // Проблемы управления и информатики. Доклады II международной конференции (19–22 июня). – Бишкек, 2007. – С. 162–167.

53. **Kerimbekov A.** Dot's mobile nonlinear control of thermal processes / A. Kerimbekov, R. Kurmanalieva, Z. Asanova // II Turk dunyasi matematik sempozyumu. Sakarya Universitesi. – Sakarya, 2007. – P. 75.

54. **Керимбеков А.** Решение задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи методом обобщенного управления [Текст] /А.Керимбеков, З.Кабаева //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2007. – Вып. 36. –С. 148–153.
55. **Керимбеков А.** Нелинейное точечное оптимальное управление процессом теплопередачи при минимизации квадратичного функционала [Текст] /А.Керимбеков, Ж.К. Асанова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. –Бишкек, 2007. – Вып. 36. –С. 142–147.
56. **Керимбеков А.** Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами [Текст] /А.Керимбеков, Ж.К. Асанова // Труды ИВМ и МГ СО РАН. Материалы Третьей азиатской международной школы–семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» сер.информатика. – Новосибирск, 2007. – Вып.7. – С. 244– 249.
57. **Керимбеков А.** Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами при минимизации кусочно-линейного функционала [Текст] /А.Керимбеков, Ж.К. Асанова//Международная юбилейная научная конференция, посвященная 15-летию образования Кыргызско-Российский Славянский Университет «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек, 2008. –С. 95–99.
58. **Керимбеков А.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи при подвижных точечных источниках [Текст] /А.Керимбеков, Ж.К. Асанова//Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2008. –Вып. 39. –С. 113–117.
59. **Kerimbekov A.** Dot Active Nonlinear Optimal Control Thermal Processes at Minimization Piecewise-Linear Functional /A. Kerimbekov, Zh.Asanova //Actual Problems of Control Theory, Topology and Operator Equations.–Aachen: Shaker Verlaq, 2009. –P. 133–138.
60. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами при наличии точечных подвижных источников [Текст] / А.Керимбеков, Ж.К. Асанова // Поиск. Научное приложение международного



журнала «Высшая школа Казакстана» Министерства образования и науки Республики Казакстан. Сер. Естественных и технических наук. –Алмата, 2009. –Вып.№1. –С.201– 205.

61. **Керимбекова А.** О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при минимизации квадратичного функционала [Текст] /А. Керимбеков, А.К. Баетов // Международная конференция. КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, 2012. –С.240 – 143.

62. **Керимбекова А.** О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст] /А. Керимбеков, А.К. Баетов //Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-хорезмий 2012». – Ташкент, 2012. – С. 301–305.

63. **Керимбеков А.** О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст] /А.Керимбеков, А.К. Баетов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2012. – Выпуск 44, – С.114–117

64. **Керимбеков А.** Оптимальное управление упругими колебаниями, описываемыми уравнением с разрывным коэффициентом [Текст] /А.Керимбеков, А.К. Баетов, Р.Д. Гильмутдинов // Вестн. Кыргызско-Российский Славянский Университет, Бишкек, 2010. – С. 179–183.

65. **Красниченко Л.С.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]: автореф. дис..., канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ Л.С. Красниченко. – Бишкек, 2012. – 18с.

66. **Краснов М.В.** Интегральные уравнения [Текст] / М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.

67. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа [Текст] / Н.В. Крылов. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

68. **Кубышкин В.А.** Методы исследования систем управления с распределенными параметрами с подвижными источниками воздействия [Текст]: дис..., д-ра техн. наук: 05.13.01 / В.А.Кубышкин – М., 2002. – 261 с.

69. **Кубышкин В.А.** Подвижное управление колебаниями в системах с распределенными параметрами[Текст] / В.А. Кубышкин // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 10. – С. 117–128.
70. **Кубышкин В.А.** Система моделирования и управления подвижным воздействием на базе программных средств MATLAB [Текст] / В. А. Кубышкин, В. С. Суховеров; ст. представлена к публ. А. Г. Бутковским // Проблемы управления. – 2008. – № 2. – С. 64-69.
71. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики [Текст] /О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
72. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными[Текст] /Ж.Л.Лионс.–М.: Мир, 1972. – 414с.
73. **Лурье К.А.** Оптимальное управление в задачах математической физики[Текст] / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
74. **Люстерник Л.А.** Элементы функционального анализа[Текст]/Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
75. **Плотников В.И.** Энергетические неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций[Текст] / В.И. Плотников //Изв. АН СССР серия мат.– 1968. – т. 32, №4. –С. 743– 755.
76. **Понтрягин Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов[Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе и др. // – М.: Физматгиз, 1983. – 392 с.
77. **Розоноэр Л.И.** Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем[Текст] / Л.И. Розоноэр. // Автоматика и телемеханика. – 1959. –Т.20, №10. – С. 1320–1334, №11. – С. 1442–1458, №12. – С. 1561– 1578.
78. **Садовничий В.А.** Теория операторов[Текст] /В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.
79. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами[Текст]/ Т.К. Сиразетдинов. – М.: Наука, 1977. – 497 с.

80. **Смирнов Е.Я.** Некоторые задачи математической теории управления. /Е.Я. Смирнов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. – 199 с.
81. **Теймуров Р.А.** Об одной задаче оптимального управления подвижными источниками[Текст] / Р.А. Теймуров // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №7. – С. 29-45.
82. **Теймуров Р.А.** О существовании и единственности решения задачи оптимального управления подвижными источниками[Текст] / Р.А. Теймуров // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Science of Azerbaijan, 2009, vol. XXXI(XXXIX), pp.219–224.
83. **Теймуров Р.А.** Управление движением источников для волнового уравнения [Текст] / Р.А. Теймуров // Доклады НАН Азербайджана. – 2015. – Т. LXX, №1. – С. 7–14.
84. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А.Н Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
85. **Тихонов А.Н.** Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении[Текст] /А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
86. **Урывская Т.Ю.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст]: автореф.дис..., канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.Ю.Урывская – Бишкек, 2010. – 18 с.
87. **Фельдбаум А.А.** Методы теории автоматического управления[Текст]/А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
88. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления[Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. Т.1. – 607 с., Т.2. – 800 с.
89. **Черноусько Ф.Л.** Управление колебаниями[Текст] /Ф.Л.Черноусько, Л.Д. Акуленко, В.М. Соколов.– М.: Наука, 1980.– 384 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Пример 2.3

#### 1) Вычисление собственных значений $\lambda_n$ :

```
function Research
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
            'units','normal',...
            'menu','none',...
            'name','This program was realized to find lambda and to solve
integrals')

F =uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.1 0.9 0.2 0.05],...
            'string','x*tan(x)= alpha')
alfa_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.1 0.84 0.05 0.05],...
            'string','alfa=')
alfa_edit =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.15 0.84 0.15 0.05],...
            'string','0.5')
Methods_pop = uicontrol('units','normal',...
            'Style','popup',...
            'String','Zadacha1|Zadacha2|Zadacha3',...
            'Position',[0.15 0.78 0.15 0.05])
l1_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.05 0.7 0.08 0.05],...
            'string','lambda1')
lam =uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0 0.64 0.05 0.05],'string','L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0 0.58 0.05 0.05],'string','L^2')

l1(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.05 0.64 0.08 0.05])
l2(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.05 0.58 0.08 0.05])
l2_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.14 0.7 0.08 0.05],...
            'string','lambda2')
l1(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.14 0.64 0.08 0.05])
l2(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.14 0.58 0.08 0.05])
l3_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.23 0.7 0.08 0.05],...
            'string','lambda3')
```

```

1(3) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.23 0.64 0.08 0.05])
12(3) =uicontrol('units','normal',...
                'style','edit',...
                'pos',[0.23 0.58 0.08 0.05])
14_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.32 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda4')
1(4) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.32 0.64 0.08 0.05])
12(4) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.32 0.58 0.08 0.05])
15_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.41 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda5')
1(5) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.41 0.64 0.08 0.05])
12(5) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.41 0.58 0.08 0.05])
16_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.5 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda6')
1(6) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.5 0.64 0.08 0.05])
12(6) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.5 0.58 0.08 0.05])
17_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.59 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda7')
1(7) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.59 0.64 0.08 0.05])
12(7) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.59 0.58 0.08 0.05])
18_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.68 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda8')
1(8) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.68 0.64 0.08 0.05])
12(8) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.68 0.58 0.08 0.05])
19_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.77 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda9')
1(9) =uicontrol('units','normal',...
               'style','edit',...
               'pos',[0.77 0.64 0.08 0.05])

```

```

12(9) =uicontrol('units','normal',...
                'style','edit',...
                'pos',[0.77 0.58 0.08 0.05])
110_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.86 0.7 0.09 0.05],...
                 'string','lambda10')
1(10) =uicontrol('units','normal',...
                'style','edit',...
                'pos',[0.86 0.64 0.09 0.05])
12(10) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.86 0.58 0.09 0.05])

%%%%
V_t =uicontrol('units','normal',...
              'style','text',...
              'pos',[0.59 0.45 0.08 0.05], 'string', '||V||')
V=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.68 0.45 0.08 0.05])

F_t =uicontrol('units','normal',...
              'style','text',...
              'pos',[0.39 0.45 0.08 0.05], 'string', '||F||')
F=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.48 0.45 0.08 0.05])

Run=uicontrol('units','normal',...
              'style','push',...
              'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
              'string','Count',...
              'call',{@RunCall});

Exit=uicontrol('units','normal',...
              'style','push',...
              'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
              'string','Exit',...
              'call','close(gcf)')
function RunCall(source, eventdata)
    m1 = 0;
    m2= 0;
    m3 = 0;
    m4 = 0;
    alfa = str2num(get(alfa_edit,'string'));
    x = 0:0.1:1;
    index = get(Methods_pop,'value');
    if(index == 0)
        msgbox('Please choose Function');
        return;
    end
    for(k = 1:10)
        x0 = 0 + pi*(k-1);
        if(k==1)
            x0 = pi/4;
        end
        str = ['x.*tan(x)', '-', num2str(alfa)];
        lambda(k)=fzero(str,x0);
        lambda2(k) = lambda(k)*lambda(k);
        set(l(k), 'string', lambda(k));

```

```

set(l2(k), 'string', lambda2(k));

z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
y = (1-x).*cos(z(k)*x);
t0(k) = trapz(x,y);
%%z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
y = 10*(1+x).*cos(z(k)*x);
t1(k) = trapz(x,y);
%%z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
y = x.*cos(z(k)*x);
t2(k) = trapz(x,y);
m1 = max(m1,t0(k));
m2 = max(m2, t1(k)*2);
m3 = 648/1000;
m4 = (1/lambda(1)^2 +1/6);

end

v = sqrt(3*(m1^2 + 2*m4*m3^2));
set(V, 'string', num2str(v));
set(F, 'string', num2str(m3));

end
end

```

## 2) Численные значения параметров $g_n$ , $\psi_n$ , $\xi_n$ :

```

function Research
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
            'units','normal',...
            'menu','none',...
            'name','Постановка квадратичной задачи нелинейной оптимизации с
точечным подвижным управлением')

F =uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.1 0.9 0.2 0.05],...
            'string','x*tan(x)= alpha')
alfa_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.1 0.84 0.05 0.05],...
            'string','alfa=')
%Поле для ввода значения параметра альфа
alfa_edit =uicontrol('units','normal',...
            'style','edit',...
            'pos',[0.15 0.84 0.15 0.05],...
            'string','0.5')
%Позволяет нам выбрать функцию для интегрирования:
%Zadacha1 - Psi
%Zadacha2- Psi2
%Zadacha1 - ksi
Methods_pop = uicontrol('units','normal',...
            'style','popup',...
            'String','Zadacha1|Zadacha2|Zadacha3',...
            'Position',[0.15 0.78 0.15 0.05])
%-----Таблица для получения 10 значений лямбда и их квадратов-----
l1_txt=uicontrol('units','normal',...
            'style','text',...
            'pos',[0.05 0.7 0.08 0.05],...

```

```

        'string', 'lambda1')
lam =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0 0.64 0.05 0.05],'string' , 'L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0 0.58 0.05 0.05],'string' , 'L^2')

1(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.05 0.64 0.08 0.05])
12(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.05 0.58 0.08 0.05])
12_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.14 0.7 0.08 0.05],...
        'string', 'lambda2')
1(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.14 0.64 0.08 0.05])
12(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.14 0.58 0.08 0.05])
13_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.23 0.7 0.08 0.05],...
        'string', 'lambda3')
1(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.23 0.64 0.08 0.05])
12(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.23 0.58 0.08 0.05])
14_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.32 0.7 0.08 0.05],...
        'string', 'lambda4')
1(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.32 0.64 0.08 0.05])
12(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.32 0.58 0.08 0.05])
15_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.41 0.7 0.08 0.05],...
        'string', 'lambda5')
1(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.41 0.64 0.08 0.05])
12(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.41 0.58 0.08 0.05])
16_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.5 0.7 0.08 0.05],...
        'string', 'lambda6')
1(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.5 0.64 0.08 0.05])
12(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...

```



```

        'pos',[0.5 0.58 0.08 0.05])
17_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.59 0.7 0.08 0.05],...
        'string','lambda7')
1(7) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.59 0.64 0.08 0.05])
12(7) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.59 0.58 0.08 0.05])
18_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.68 0.7 0.08 0.05],...
        'string','lambda8')
1(8)=icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.68 0.64 0.08 0.05])
12(8) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.68 0.58 0.08 0.05])
19_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.77 0.7 0.08 0.05],...
        'string','lambda9')
1(9) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.77 0.64 0.08 0.05])
12(9) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.77 0.58 0.08 0.05])
110_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.86 0.7 0.09 0.05],...
        'string','lambda10')
1(10) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.86 0.64 0.09 0.05])
12(10) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.86 0.58 0.09 0.05])
%-----
%-----Таблица значений функций при найденных лямбда-----
f11_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.05 0.48 0.08 0.05],...
        'string','F1')
f11_text =icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0 0.42 0.05 0.05],'string' , 'F')
f112_text =icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0 0.36 0.05 0.05],'string' , 'F^2')

f1(1) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.05 0.42 0.08 0.05])
f12(1) =icontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.05 0.36 0.08 0.05])
f12_txt=icontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.14 0.48 0.08 0.05],...

```

```

        'string', 'F2')
fi(2) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.14 0.42 0.08 0.05])
fi2(2) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.14 0.36 0.08 0.05])
fi3_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.23 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F3')
fi(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.23 0.42 0.08 0.05])
fi2(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.23 0.36 0.08 0.05])
fi4_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.32 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F4')
fi(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.32 0.42 0.08 0.05])
fi2(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.32 0.36 0.08 0.05])
fi5_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.41 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F5')
fi(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.41 0.42 0.08 0.05])
fi2(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.41 0.36 0.08 0.05])
fi6_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.5 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F6')
fi(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.5 0.42 0.08 0.05])
fi2(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.5 0.36 0.08 0.05])
fi7_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.59 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F7')
fi(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.59 0.42 0.08 0.05])
fi2(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...
    'pos',[0.59 0.36 0.08 0.05])
fi8_txt=uicontrol('units','normal',...
    'style', 'text',...
    'pos',[0.68 0.48 0.08 0.05],...
    'string', 'F8')
fi(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style', 'edit',...

```

```

        'pos',[0.68 0.42 0.08 0.05])
fi2(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.68 0.36 0.08 0.05])
fi9_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.77 0.48 0.08 0.05],...
        'string','F9')
fi(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.77 0.42 0.08 0.05])
fi2(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.77 0.36 0.08 0.05])
fi10_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style','text',...
        'pos',[0.86 0.48 0.09 0.05],...
        'string','F10')
fi(10) =uicontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.86 0.42 0.09 0.05])
fi2(10) =uicontrol('units','normal',...
        'style','edit',...
        'pos',[0.86 0.36 0.09 0.05])

%-----
-
%кнопка для расчета данных
Run=uicontrol('units','normal',...
        'style','push',...
        'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
        'string','Count',...
        'call',{@RunCall});

%кнопка выхода
Exit=uicontrol('units','normal',...
        'style','push',...
        'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
        'string','Exit',...
        'call','close(gcf)')

%функция обрабатываемая при нажатии на кнопку Run
function RunCall(source, eventdata)
    %получаем значение лямбда из поля alfa_edit и переводим со
    %строчного в числовой формат
    alfa = str2num(get(alfa_edit,'string'));
    x = 0:0.1:1;
    %определяем какая функция для вычисления выбрана
    index = get(Methods_pop,'value');
    if(index == 0)
        msgbox('Please choose Function');
        return;
    end
    for(k = 1:10)
        x0 = 0 + pi*(k-1);
        if(k==1)
            x0 = pi/4;
        end
        str = ['x.*tan(x)','- ',num2str(alfa)];
        %находим к-ю лямбду
        lambda(k)=fzero(str,x0);
        %квадрат лямбды
        lambda2(k) = lambda(k)*lambda(k);
        %заполняем таблицу для значений лямбды
        set(l(k),'string',lambda(k));
        set(l2(k),'string',lambda2(k));

```

```

%Если выбрана первая функция, то вычисляем интеграл для k-го
%лямбда 0 <= x <= 1
if(index == 1)
    z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
    y = (1-x).*cos(z(k)*x);
    t(k) = trapz(x,y);
    t2(k) = t(k)^2;
    %заполняем таблицу
    set(fi(k), 'string', num2str(t(k)));
    set(fi2(k), 'string', num2str(t2(k)));
else
    if(index == 2)
        z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
        y = 10*(1+x).*cos(z(k)*x);
        t(k) = trapz(x,y);
        t2(k) = t(k)^2;
        set(fi(k), 'string', num2str(t(k)));
        set(fi2(k), 'string', num2str(t2(k)));
    else
        if(index == 3)
            z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
            y = x.*cos(z(k)*x);
            t(k) = trapz(x,y);
            t2(k) = t(k)^2;
            set(fi(k), 'string', num2str(t(k)));
            set(fi2(k), 'string', num2str(t2(k)));
        end
    end
end
end
end
end
end
end

```

### 3) Сходимость приближённого решения нелинейного интегрального уравнения (численные расчеты):

```

function G
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'name','Сходимость приближенного решения интегрального уравнения');

l1_txt = uicontrol('units','normal',...
    'style','text',...
    'pos',[0.41 0.9 0.08 0.07],...
    'string','alfa = 0.5');
lam =uicontrol('units','normal',...
    'style','text',...
    'pos',[0.33 0.84 0.05 0.05],'string','L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
    'style','text',...
    'pos',[0.33 0.78 0.05 0.05],'string','L^2')

l(1) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.41 0.84 0.08 0.05])
l2(1) =uicontrol('units','normal',...

```

```

        'style', 'edit',...
        'pos',[0.41 0.78 0.08 0.05])
l2_txt=icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.5 0.9 0.08 0.07],...
        'string','alfa = 1')
l(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.5 0.84 0.08 0.05])
l2(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.5 0.78 0.08 0.05])
l3_txt=icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.59 0.9 0.08 0.07],...
        'string','alfa = 1.5')
l(3) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.59 0.84 0.08 0.05])
l2(3) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.59 0.78 0.08 0.05])

index_txt =icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.1 0.7 0.08 0.05],'string' , 'index')
alfa1_txt =icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.2 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa1')
alfa2_txt =icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.36 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa2')
alfa3_txt =icontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.52 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa3')

index_edit(1) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.66 0.08 0.03],'string' , '1')
alfa1(1) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.66 0.15 0.03])
alfa2(1) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.66 0.15 0.03])
alfa3(1) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.66 0.15 0.03])
index_edit(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.62 0.08 0.03],'string' , '2')
alfa1(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.62 0.15 0.03])
alfa2(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.62 0.15 0.03])
alfa3(2) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.62 0.15 0.03])
index_edit(3) =icontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.58 0.08 0.03],'string' , '3')

```

```

alfa1(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.58 0.15 0.03])
alfa2(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.58 0.15 0.03])
alfa3(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.58 0.15 0.03])
index_edit(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.54 0.08 0.03],'string','4')
alfa1(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.54 0.15 0.03])
alfa2(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.54 0.15 0.03])
alfa3(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.54 0.15 0.03])
index_edit(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.50 0.08 0.03],'string','5')
alfa1(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.50 0.15 0.03])
alfa2(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.50 0.15 0.03])
alfa3(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.50 0.15 0.03])
index_edit(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.46 0.08 0.03],'string','6')
alfa1(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.46 0.15 0.03])
alfa2(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.46 0.15 0.03])
alfa3(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.46 0.15 0.03])
index_edit(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.42 0.08 0.03],'string','7')
alfa1(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.42 0.15 0.03])
alfa2(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.42 0.15 0.03])
alfa3(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.42 0.15 0.03])
index_edit(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.38 0.08 0.03],'string','8')
alfa1(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.38 0.15 0.03])

```

```

alfa2(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.38 0.15 0.03])
alfa3(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.38 0.15 0.03])
index_edit(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.34 0.08 0.03],'string','9')
alfa1(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.34 0.15 0.03])
alfa2(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.34 0.15 0.03])
alfa3(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.34 0.15 0.03])
index_edit(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.30 0.08 0.03],'string','10')
alfa1(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.30 0.15 0.03])
alfa2(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.30 0.15 0.03])
alfa3(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.30 0.15 0.03])

Run=uicontrol('units','normal',...
    'style','push',...
    'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
    'string','Count',...
    'call',{@RunCall});

Exit=uicontrol('units','normal',...
    'style','push',...
    'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
    'string','Exit',...
    'call','close(gcf)')
function RunCall(source, eventdata)

    x = 0:0.1:1;
        x0 = pi/4;
        alfa(1) = 0.5;
        alfa(2) = 1;
        alfa(3) = 1.5;
        for i =1:3
            str = ['x.*tan(x)', '-', num2str(alfa(i))];
            lambda(i) = fzero(str,x0);
            lambda2(i) = lambda(i)*lambda(i);
            set(l(i),'string',num2str(lambda(i)));
            set(l2(i),'string',num2str(lambda2(i)));

            g02(i) = 11/100;
            gamma(i) = 1000/611*(1/lambda2(i) + 1/6)*g02(i);
            a1=1/lambda2(i) + 1/6;
            a2=3*(5/6+2*a1*648/1000*7/3);
            Gh(i) = gamma(i)*sqrt(4*a1*a2);

```





```

        'style', 'edit',...
        'pos',[0.5 0.84 0.08 0.05])
12(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.5 0.78 0.08 0.05])

13_txt=uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.59 0.9 0.08 0.07],...
        'string','alfa = 1.5')
1(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.59 0.84 0.08 0.05])
12(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.59 0.78 0.08 0.05])

index_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.1 0.7 0.08 0.05],'string' , 'index')
alfa1_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.2 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa1')
alfa2_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.36 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa2')
alfa3_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.52 0.7 0.15 0.05],'string' , 'alfa3')

index_edit(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.66 0.08 0.03],'string' , '1')
alfa1(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.66 0.15 0.03])
alfa2(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.66 0.15 0.03])
alfa3(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.66 0.15 0.03])
index_edit(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.62 0.08 0.03],'string' , '2')
alfa1(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.62 0.15 0.03])
alfa2(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.62 0.15 0.03])
alfa3(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.62 0.15 0.03])
index_edit(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.58 0.08 0.03],'string' , '3')
alfa1(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.58 0.15 0.03])
alfa2(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.58 0.15 0.03])

```

```

alfa3(3) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.58 0.15 0.03])
index_edit(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.54 0.08 0.03],'string','4')
alfa1(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.54 0.15 0.03])
alfa2(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.54 0.15 0.03])
alfa3(4) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.54 0.15 0.03])
index_edit(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.50 0.08 0.03],'string','5')
alfa1(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.50 0.15 0.03])
alfa2(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.50 0.15 0.03])
alfa3(5) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.50 0.15 0.03])
index_edit(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.46 0.08 0.03],'string','6')
alfa1(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.46 0.15 0.03])
alfa2(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.46 0.15 0.03])
alfa3(6) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.46 0.15 0.03])
index_edit(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.42 0.08 0.03],'string','7')
alfa1(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.42 0.15 0.03])
alfa2(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.42 0.15 0.03])
alfa3(7) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.42 0.15 0.03])
index_edit(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.38 0.08 0.03],'string','8')
alfa1(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.38 0.15 0.03])
alfa2(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.38 0.15 0.03])
alfa3(8) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.38 0.15 0.03])

```

```

index_edit(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.34 0.08 0.03],'string','9')
alfa1(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.34 0.15 0.03])
alfa2(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.34 0.15 0.03])
alfa3(9) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.34 0.15 0.03])
index_edit(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.1 0.30 0.08 0.03],'string','10')
alfa1(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.2 0.30 0.15 0.03])
alfa2(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.36 0.30 0.15 0.03])
alfa3(10) =uicontrol('units','normal',...
    'style','edit',...
    'pos',[0.52 0.30 0.15 0.03])

Run=uicontrol('units','normal',...
    'style','push',...
    'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
    'string','Count',...
    'call',{@RunCall});

Exit=uicontrol('units','normal',...
    'style','push',...
    'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
    'string','Exit',...
    'call','close(gcf)')
function RunCall(source, eventdata)

    x = 0:0.1:1;
        x0 = pi/4;
    alfa(1) = 0.5;
    alfa(2) = 1;
    alfa(3) = 1.5;
    for i =1:3
        str = ['x.*tan(x)', '-', num2str(alfa(i))];
        lambda(i) = fzero(str,x0);
        lambda2(i) = lambda(i)*lambda(i);
        set(l(i),'string',num2str(lambda(i)));
        set(l2(i),'string',num2str(lambda2(i)));

        g02(i) = 11/100;
        gamma(i) = 1000/611*(1/lambda2(i) + 1/6)*g02(i);
        a1=1/lambda2(i) + 1/6;
        a2=3*(5/6+2*a1*648/1000*7/3);
        Gh(i) = gamma(i)*sqrt(4*a1*a2);
        g0(i) = sqrt(g02(i));

    for k = 1:10
        f(i,k) = 1000/1222*gamma(i)^k/(1-gamma(i))*Gh(i);
        if(i == 1)
            set(alfa1(k),'string',num2str(f(1,k)));

```



```

l(3) =uicontrol('units','normal',...
               'style', 'edit',...
               'pos',[0.59 0.84 0.08 0.05])
l2(3) =uicontrol('units','normal',...
                'style', 'edit',...
                'pos',[0.59 0.78 0.08 0.05])

index_txt =uicontrol('units','normal',...
                    'style', 'text',...
                    'pos',[0.1 0.7 0.08 0.05], 'string' , 'index')
alfa1_txt =uicontrol('units','normal',...
                    'style', 'text',...
                    'pos',[0.2 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa1')
alfa2_txt =uicontrol('units','normal',...
                    'style', 'text',...
                    'pos',[0.36 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa2')
alfa3_txt =uicontrol('units','normal',...
                    'style', 'text',...
                    'pos',[0.52 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa3')

index_edit(1) =uicontrol('units','normal',...
                       'style', 'edit',...
                       'pos',[0.1 0.66 0.08 0.03], 'string' , '1')
alfa1(1) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.2 0.66 0.15 0.03])
alfa2(1) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.36 0.66 0.15 0.03])
alfa3(1) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.52 0.66 0.15 0.03])
index_edit(2) =uicontrol('units','normal',...
                       'style', 'edit',...
                       'pos',[0.1 0.62 0.08 0.03], 'string' , '2')
alfa1(2) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.2 0.62 0.15 0.03])
alfa2(2) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.36 0.62 0.15 0.03])
alfa3(2) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.52 0.62 0.15 0.03])
index_edit(3) =uicontrol('units','normal',...
                       'style', 'edit',...
                       'pos',[0.1 0.58 0.08 0.03], 'string' , '3')
alfa1(3) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.2 0.58 0.15 0.03])
alfa2(3) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.36 0.58 0.15 0.03])
alfa3(3) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.52 0.58 0.15 0.03])
index_edit(4) =uicontrol('units','normal',...
                       'style', 'edit',...
                       'pos',[0.1 0.54 0.08 0.03], 'string' , '4')
alfa1(4) =uicontrol('units','normal',...
                   'style', 'edit',...
                   'pos',[0.2 0.54 0.15 0.03])
alfa2(4) =uicontrol('units','normal',...

```

```

        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.54 0.15 0.03])
alfa3(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.54 0.15 0.03])
index_edit(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.50 0.08 0.03],'string' , '5')
alfa1(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.50 0.15 0.03])
alfa2(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.50 0.15 0.03])
alfa3(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.50 0.15 0.03])
index_edit(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.46 0.08 0.03],'string' , '6')
alfa1(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.46 0.15 0.03])
alfa2(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.46 0.15 0.03])
alfa3(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.46 0.15 0.03])
index_edit(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.42 0.08 0.03],'string' , '7')
alfa1(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.42 0.15 0.03])
alfa2(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.42 0.15 0.03])
alfa3(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.42 0.15 0.03])
index_edit(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.38 0.08 0.03],'string' , '8')
alfa1(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.38 0.15 0.03])
alfa2(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.38 0.15 0.03])
alfa3(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.38 0.15 0.03])
index_edit(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.34 0.08 0.03],'string' , '9')
alfa1(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.34 0.15 0.03])
alfa2(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.34 0.15 0.03])
alfa3(9) =uicontrol('units','normal',...

```



end

## б) Сходимость приближений минимального значения функционала (численные расчеты):

```
function Number6
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
            'units','normal',...
            'menu','none',...
            'name','Сходимость приближенного значения функционала -I')

g_txt =uicontrol('units','normal',...
                'style','text',...
                'pos',[0.1 0.9 0.2 0.05],...
                'string','g0^2')
g_edit =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.1 0.84 0.2 0.05])
l1_txt = uicontrol('units','normal',...
                  'style','text',...
                  'pos',[0.41 0.9 0.08 0.07],...
                  'string','alfa = 0.5');
lam =uicontrol('units','normal',...
              'style','text',...
              'pos',[0.33 0.84 0.05 0.05],'string','L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
               'style','text',...
               'pos',[0.33 0.78 0.05 0.05],'string','L^2')

l1(1) =uicontrol('units','normal',...
                'style','edit',...
                'pos',[0.41 0.84 0.08 0.05])
l2(1) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.41 0.78 0.08 0.05])
l2_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.5 0.9 0.08 0.07],...
                 'string','alfa = 1')
l1(2) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.5 0.84 0.08 0.05])
l2(2) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.5 0.78 0.08 0.05])

l3_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style','text',...
                 'pos',[0.59 0.9 0.08 0.07],...
                 'string','alfa = 1.5')
l1(3) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.59 0.84 0.08 0.05])
l2(3) =uicontrol('units','normal',...
                 'style','edit',...
                 'pos',[0.59 0.78 0.08 0.05])
index_txt =uicontrol('units','normal',...
                    'style','text',...
```



```

        'pos',[0.1 0.7 0.08 0.05], 'string' , 'index')
alfa1_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.2 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa1')
alfa2_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.36 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa2')
alfa3_txt =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'text',...
        'pos',[0.52 0.7 0.15 0.05], 'string' , 'alfa3')

index_edit(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.66 0.08 0.03], 'string' , '1')
alfa1(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.66 0.15 0.03])
alfa2(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.66 0.15 0.03])
alfa3(1) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.66 0.15 0.03])
index_edit(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.62 0.08 0.03], 'string' , '2')
alfa1(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.62 0.15 0.03])
alfa2(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.62 0.15 0.03])
alfa3(2) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.62 0.15 0.03])
index_edit(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.58 0.08 0.03], 'string' , '3')
alfa1(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.58 0.15 0.03])
alfa2(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.58 0.15 0.03])
alfa3(3) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.58 0.15 0.03])
index_edit(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.54 0.08 0.03], 'string' , '4')
alfa1(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.54 0.15 0.03])
alfa2(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.54 0.15 0.03])
alfa3(4) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.54 0.15 0.03])
index_edit(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.50 0.08 0.03], 'string' , '5')
alfa1(5) =uicontrol('units','normal',...

```

```

        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.50 0.15 0.03])
alfa2(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.50 0.15 0.03])
alfa3(5) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.50 0.15 0.03])
index_edit(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.46 0.08 0.03],'string' , '6')
alfa1(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.46 0.15 0.03])
alfa2(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.46 0.15 0.03])
alfa3(6) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.46 0.15 0.03])
index_edit(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.42 0.08 0.03],'string' , '7')
alfa1(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.42 0.15 0.03])
alfa2(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.42 0.15 0.03])
alfa3(7) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.42 0.15 0.03])
index_edit(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.38 0.08 0.03],'string' , '8')
alfa1(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.38 0.15 0.03])
alfa2(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.38 0.15 0.03])
alfa3(8) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.38 0.15 0.03])
index_edit(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.34 0.08 0.03],'string' , '9')
alfa1(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.34 0.15 0.03])
alfa2(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.36 0.34 0.15 0.03])
alfa3(9) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.52 0.34 0.15 0.03])
index_edit(10) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.1 0.30 0.08 0.03],'string' , '10')
alfa1(10) =uicontrol('units','normal',...
        'style', 'edit',...
        'pos',[0.2 0.30 0.15 0.03])
alfa2(10) =uicontrol('units','normal',...

```

