Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»

ISSN 1684-8519

ИЗВЕСТИЯ

ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 325, № 2, 2014

Математика, физика и механика

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ
г. Томск

СОДЕРЖАНИЕ CONTENTS

Анализ концепции построения и исследования фазовых портретов экспериментальных и модельных распределений параметров низкотемпературной плазмы Зимин В.П.	7	**Analysis of the concept of constructing and researching phase portraits of experimental and model parameter distributions of low-temperature plasma** Zimin V.P.
Модернизация распределений Орда для аппроксимации двухсторонних дискретных распределений экспериментальных данных Карпов И.Г., Грибков А.Н.	15	**Modernization of Ord distribution for approximation of the bilateral discrete distributions of experimental data** Karpov I.G., Gribkov A.N.
О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка Саадалов Т.Ы.	22	**The conjugate problem for hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations** Saadalov T.Y.
Д-аналог метода определения однопараметрической обобщенной обратной матрицы Дразина, основанный на скелетном разложении матрицы Асланян Г.А., Симонян С.А.	29	**D-analogue of an algorithm for determining single-parametric Drazin generalized inverse matrix based on matrix full rank factorization** Aslanyan H.A., Simonyan S.H.
Оценка спектра мощности стационарного случайного процесса сплайном первого порядка Устинова И.Г., Лазарева Е.Г., Подберезина Е.И.	35	**Evaluation of the power spectrum of a stationary random process as a first-order spline** Ustinova I.G., Lazareva E.G., Podberezina E.I.
Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе, совершающем пространственное движение Филимонихин Г.Б., Гончаров В.Б.	41	**Rotor balancing by auto-balancer in visco-elastic fixed bed being in spatial motion** Filimonikhin G.B., Goncharov V.V.
Направления развития теории безопасности рабочего процесса комплекта грузоподъемных машин трубоукладочной колонны Щербаков В.С., Корытов М.С., Шабалин А.Н.	50	**Directions in developing safety theory of working process for a load-lifting cars set of a pipe-laying column** Shcherbakov V.S., Korytov M.S., Shabalin A.N.
Метод оценки эффективности пылеуловительных систем Куц В.П., Слободян С.М.	58	**Method for estimating dedusting system efficiency** Kuts V.P., Slobodyan S.M.
Влияние нерастворенного газа в рабочей жидкости на динамику гидропривода лесопогрузчика Никитин А.А., Мандраков Е.А.	65	**Influence of undissolved gas in working liquid on dynamics of a logger hydraulic drive** Nikitin A.A., Mandrakov E.A.
Стенд для исследований усталостного разрушения комбинацией методов акустической эмиссии, картирования деформации на поверхности и тензометрии Панин С.В., Бяков А.В., Любутин П.С., Суднер Р., Гренке В.В., Шакиров И.В., Башков О.В.	72	**Test bench for fatigue failure investigation by combination of acoustic emission, surface strain mapping and tensometry** Panin S.V., Byakov A.V., Lyubutin P.S., Sunder R., Grenke V.V., Shakirov I.V., Bashkov O.V.
Закономерности изнашивания титановых сплавов ПТ-3В и ВТ6 с крупнозернистой и ультрамелкозернистой структурой Круковский К.В., Кашин О.А., Гирсова Н.В.	81	**The regularities of wear of titanium alloys PT-3V and VT6 with coarse-grained and ultrafine-grained structure** Krukovskiy K.V., Kashin O.A., Girsova N.V.
Метод управления пространственными характеристиками излучения диодных лазеров Паращук В.В., Гуделев В.Г.	91	**Method for controlling spatial characteristics of diode lasers radiation** Parashchuk V.V., Gudelev V.G.
Особенности эволюции структуры титанового сплава ВТ6 в субмикрокристаллическом состоянии при сверхпластической деформации Раточка И. В., Лыкова О. Н., Грабовецкая Г.П.	99	**Features of evolution of Ti-6Al-4V submicrocrystalline titanium alloy structure under superplastic deformation** Ratochka I.V., Lykova O.N., Grabovetskaya G.P.
Антистатические композиционные покрытия для защиты магниевых сплавов на основе порошковых красок, обработанных в планетарной шаровой мельнице Языков С.Ю., Даммер В.Х., Панин С.В., Овечкин Б.Б.	105	**Antistatic composite coatings for protecting magnesium alloys based on powder paints processed in a planetary ball mill** Yazykov S.Yu., Dammer V.Kh., Panin S.V., Ovechkin B.B.
Фазовый переход металл–полупроводник в технологии наногетероэпитаксиальных структур Марончук И.И., Марончук И.Е., Кулюткина Т.Ф.	114	**Metal–semiconductor phase transition in nanoheteroepitaxial structures technology** Maronchuk I.I., Maronchuk I.E., Kulyutkina T.F.
Анализ вариантов осушения влажного воздуха с помощью силикагеля при консервации агрегатов пароводяного тракта тепловой электрической станции Голдаев С.В., Хушвактов А.А.	120	**Analyzing options of moist air dehumidifying with silica gel at conservation of units of steam and water tract at thermal power plant** Goldaev S.V., Khushvaktov A.A.
Лидарное зондирование малых газовых составляющих атмосферы методом дифференциального поглощения: результаты моделирования и экспериментов Бочковский Д.А., Романовский О.А., Харченко О.В., Яковлев С.В.	127	**Lidar sounding of atmosphere trace gases by the differential absorption method: simulation and experiment results** Bochkovski D.A., Romanovskii O.A., Kharchenko O.V., Yakovlev S.V.

УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Саадалов Толонбай Ысманович,
ст. преподаватель кафедры информатики Ошского технологического университета им. М.М. Адышева, Кыргызская Республика,
714081, г. Ош, ул. Исанова, 81. E-mail: saadtol_68@mail.ru

Актуальность работы обусловлена доказательством корректности задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с младшими членами.

Цель работы: *доказательство существования и единственности решения задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда условия сопряжения задаются на нехарактеристической линии.*

Методы исследования: *Методом функции Римана и интегральных уравнений разрешимость задачи эквивалентным образом сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решение которого устанавливается методом последовательных приближений.*

Результаты: *В работе исследована разрешимость задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с младшими переменными коэффициентами. Установлено, что когда порядок уравнения равен четырем и условия сопряжения задаются на нехарактеристической линии, то для корректности задачи, вместо обычных двух условий склеивания, необходимо задание четырех условий склеивания. Особенностью данной задачи является то, что условия сопряжения задаются не на координатной оси, а на биссектрисе первой четверти плоскости. С целью определения следа искомой функции и ее производных второго, третьего, четвертого порядков на линии изменения типа уравнений, а также для получения явного представления решения, построены функции Римана для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, определяемые как решения соответствующих сопряженных задач Гурса. Изучены некоторые свойства функции Римана, и получены представления решения задачи Коши для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Разрешимость задачи сопряжения установлена эквивалентным сведением ее к разрешимости системы четырех линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности решений задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка.*

Ключевые слова:
Задачи сопряжения, гиперболические и псевдопараболические уравнения, краевые и начальные условия, функции Римана, уравнения Вольтерра и Фредгольма.

Постановка задачи

При изучении физико-химических процессов, происходящих в составных телах, часто используются математические модели, которые основаны на сопряжении различных типов уравнений в разных частях рассматриваемой области [1–3]. Задачи сопряжения уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков изучены в работах [4–18].

В работе в области

$$D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим задачу сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка вида

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + b(x, y)u_{xy} + c_1(x, y)u_x + \\ +c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = 0, \ (x, y) \in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \beta(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \\ +\gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = 0, \ (x, y) \in D_2, \tag{2}$$

где b, β, d, δ, c_i, g_i $(i=1,2)$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x<y)$, $D_2=D\cap(x>y)$.

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r=0,1,\dots,n;\ s=0,1,\dots,m)$. Отметим, что линия $y=x$ не является характеристикой уравнения (1) и (2).

Задача 1 (Задача сопряжения). *Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+2}(D_1)]$, удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) соответственно в областях D_1 и D_2, краевым условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \ 0 \le y \le \ell, \tag{3}$$

$$u_{xx}(\ell, y) = \varphi_3(y), \ 0 \le y \le \ell, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$u(y-0, y) = u(y+0, y),$$
$$u_x(y-0, y) = u_x(y+0, y), \ 0 \le y \le \ell,$$
$$u_{xy}(y-0, y) = u_{xy}(y+0, y),$$
$$u_{xxy}(y-0, y) = u_{xxy}(y+0, y), \ 0 \le y \le \ell, \tag{6}$$

где φ_i $(i=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем для них выполняются следующие условия

$$\varphi_i \in C^2[0, h] \ (i=1,2), \ \varphi_3 \in C^1[0, h], \ \psi \in C^2[0, \ell], \tag{7}$$

$$b \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), \ c_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), \ d \in C(\bar{D}_1), \tag{8}$$

$$\beta \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \ \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \\ \gamma_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \ \delta \in C(\bar{D}_2), \tag{9}$$

$$\varphi_{i+1}(0)=\psi^{(i)}(0)\,(i=0,1),\ \ \varphi_3(0)=\psi''(\ell). \qquad (10)$$

Уравнения (1) и (2) в области D в силу условиям сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [19]. Задача 1 в случае b, β, c_i, $\gamma_i\equiv 0$ ($i=1,2$), d, δ=const изучена в работе [20].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения:

$$u(y,y)=\tau(y), \quad u_x(y,y)=\nu(y),$$
$$u_{xy}(y,y)=\mu(y),\ u_{xxy}(y,y)=\chi(y),\ 0\le x\le \ell, \qquad (11)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $\chi(x)$ – пока неизвестные функции.

Если удастся определить функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $\chi(x)$, то решение задачи 1 сводится к определению решения уравнений (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно.

Решение вспомогательных задач Коши

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+2}(D_1)$ *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению* (1) *и начальным условиям* (11).

Задача 3. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(D_2)\cap C^{3+1}(D_2)$ *удовлетворяющую в области* D_2 *уравнению* (2) *и начальным условиям* (11).

Теорема 1. *Если выполняются условия* (8) *и* $\tau(y)\in C^2[0,\ell]$, $\nu(y)\in C^1[0\ell]$, $\mu(y)\in C^1[0,\ell]$, $\chi(y)\in \tilde{N}[0,\ell]$, *то решение задачи 2 существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,y)=\tau(y)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_1(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_1(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_1(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (12)$$

где

$$A_1(x,y;\xi)=\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)+b(\xi,\xi)\vartheta_\eta(x,y;\xi,\xi)+$$
$$+[b_\eta(\xi,\xi)-c_1(\xi,\xi)+c_2(\xi,\xi)]\vartheta(x,y;\xi,\xi),$$
$$B_1(x,y;\xi)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)+b(\xi,\xi)\vartheta(x,y;\xi,\xi),$$
$$C_1(x,y;\xi)=\vartheta_\eta(x,y;\xi,\xi),$$

а $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая в области

$$D_1^*=\{(\xi,\eta): x<\xi<y, \xi<\eta<y\}$$

как решение следующей задачи Гурса [9]:

$$L_1^*(\vartheta)\equiv\vartheta_{\eta\eta\xi\xi}+(b\vartheta)_{\eta\xi}-(c_1\vartheta)_\xi-(c_2\vartheta)_\eta+d\vartheta=0,$$
$$(x,y)\in D_1^*, \qquad (13)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\eta-y,$$
$$x\le\eta\le y,$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\xi-x,$$
$$x\le\xi\le y. \qquad (14)$$

Доказательство. Из уравнения (13), с учетом краевых условий (14), методом интегрирования получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции Римана:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=(\xi-x)(\eta-y)-$$
$$-\int_x^\xi ds\int_y^\eta K(\xi,\eta;s,t)\vartheta(x,y;s,t)dt, \qquad (15)$$

где

$$K(\xi,\eta;s,t)=b(s,t)-(\eta-t)c_1(s,t)-$$
$$-(\xi-s)c_2(s,t)+(\xi-s)(\eta-t)d(s,t),$$

которое допускает единственное решение. Из (12) найдем производные

$$u_x(x,y)=\nu(x)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1x}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1x}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1x}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_x(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (16)$$

$$u_{xy}(x,y)=\mu(y)+\tau(y)\int_x^y c_2(s,y)ds-$$
$$\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1xy}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xy}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1xy}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xy}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (17)$$

$$u_{xxy}(x,y)=\chi(x)+c_2(x,x)\tau(x)-c_2(x,y)\tau(y)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1xxy}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xxy}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1xxy}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xxy}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1. \qquad (18)$$

Из формул (12), (16)–(18) легко усмотреть, что начальные условия (11) выполняются.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (9) *и* $\tau(y)\in C^1[0,\ell]$, $\nu(y)\in C^2[0,\ell]$, $\mu(y)\in C^1[0,\ell]$, $\chi(y)\in C[0,\ell]$, *то решение задачи 3 существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,y)=A_2(x,y)\tau(y)+$$
$$+\int_y^x\left[\begin{aligned}&B_2(x,y;\xi)\tau(\xi)+C_2(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+w_\xi(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-w(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_2, \qquad (19)$$

где

$$A_2(x,y)=w_{\xi\xi}(x,y;y,y)+\beta(y,y)w(x,y;y,y),$$
$$B_2(x,y;\xi)=w_{\xi\xi\eta}(x,y;\xi,\xi)+\beta(\xi,\xi)w_\eta(x,y;\xi,\xi)+$$
$$[\beta_\eta(\xi,\xi)-\gamma_1(\xi,\xi)+\gamma_2(\xi,\xi)]w(x,y;\xi,\xi),$$
$$C_2(x,y;\xi)=w_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)+\beta(\xi,\xi)w(x,y;\xi,\xi),$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая в области

$$D_2^*=\{(\xi,\eta): y<\xi<x, y<\eta<\xi\}$$

как решение задачи Гурса [9]:

$$L_2^*(w)\equiv w_{\xi\xi\xi\eta}+(\beta w)_{\xi\eta}-(\gamma_1 w)_\xi-(\gamma_2 w)_\eta+\delta w=0,$$
$$(x,y)\in D_2^*, \qquad (20)$$

$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ w_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,$$
$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=1,\ y\le\eta\le x,$$
$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\omega(x,y;\xi),\ y\le\xi\le x, \qquad (21)$$

а $\omega(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$w_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y)+[\beta(\xi,y)w(x,y;\xi,y)]_{\xi}-$$
$$-\gamma_2(\xi,y)w(x,y;\xi,y)=0,\ y<\xi<x, \quad (22)$$

$$w(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0,\ w_{\xi}(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0,$$
$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=1. \quad (23)$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Задача (20), (21) однозначно определяет функцию Римана $w(x,y;\xi,\eta)$ в области D_2.

Лемма 1. Если

$$\forall y\in[0,\ell]\wedge x\in[y,\ell]:\ \beta(x,y)-$$
$$-\frac{1}{2}(x-y)^2\gamma_2(x,y)\le 0, \quad (24)$$

то

$$w_{xx}(\ell,y;y,y)\ge 1. \quad (25)$$

Доказательство. Интегрируя уравнение (22) и с учетом условий (23), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$w(x,y;\xi,y)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2+$$
$$+\int_{\xi}^{x}H(y,\xi;s)w(x,y;s,y)ds,\ y\le\xi\le x, \quad (26)$$

где

$$H(y,\xi;s)=-(s-\xi)[\beta(s,y)-\frac{1}{2}(s-\xi)^2\gamma_2(s,y)].$$

Дифференцируя дважды уравнение (26), имеем

$$w_{xx}(x,y;\xi,y)=1+\int_{\xi}^{x}H(y,\xi;s)w_{xx}(x,y;s,y)ds. \quad (27)$$

Полагая $x=\ell$, $\xi=y$ из (27) имеем

$$w_{xx}(\ell,y;y,y)=1+\int_{y}^{\ell}H(y,y;s)w_{xx}(\ell,y;s,y)ds. \quad (28)$$

При соблюдении условия (24) выполняется неравенство $(y,y;s)\ge 0$. Тогда из (28) заключаем, что неравенство (25) имеет место. Лемма 1 доказано.

Сведение задачи к решению системы интегральных уравнений

Используя первое условие (3) из (12), будем иметь

$$\tau(y)=$$
$$=\tau_0(y)+\int_0^y\left[\begin{matrix}H_{11}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{12}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{13}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{14}(y,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi, \quad (29)$$

где

$$H_{11}(y,\xi)=A_1(0,y;\xi),\ H_{12}(y,\xi)=B_1(0,y;\xi),$$
$$H_{13}(y,\xi)=C_1(0,y;\xi),\ H_{14}(y,\xi)=\vartheta(0,y;\xi,\xi),$$

где $\tau_0(y)=\varphi_1(y)$. Из (15) с учетом второго условия (3) имеем

$$\nu(0)-\int_0^y\left[\begin{matrix}A_{1x}(0,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1x}(0,y;\xi)\nu(\xi)+\\+C_{1x}(0,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_x(0,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi=$$
$$=\varphi_2(y).$$

Дифференцируя полученное соотношение по y, получим

$$\mu(y)=A_{1x}(0,y;y)\tau(y)+$$
$$+\int_0^y\left[\begin{matrix}A_{1xy}(0,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xy}(0,y;\xi)\nu(\xi)+\\+C_{1xy}(0,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xy}(0,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi+\varphi_2'(y),$$

Отсюда с учетом (29) имеем

$$\mu(y)=$$
$$=\mu_0(y)+\int_0^y\left[\begin{matrix}H_{31}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{32}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{33}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{34}(y,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi, \quad (30)$$

где

$$H_{31}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{11}(y,\xi)+A_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{32}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{12}(y,\xi)+B_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{33}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{13}(y,\xi)+C_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{34}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{14}(y,\xi)+\vartheta_{xy}(0,y;\xi,\xi),$$
$$\mu_0(y)=A_{1x}(0,y;y)\tau_0(y)+\varphi_2'(y).$$

Используя условие (5) в (18), и дифференцируя полученное соотношение, имеем

$$\nu(y)=$$
$$=\nu_0(y)+\int_0^y\left[\begin{matrix}H_{21}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{22}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{23}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{24}(y,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi, \quad (31)$$

$$H_{21}(y,\xi)=-B_{2x}(y,0;\xi),\ H_{22}(y,\xi)=-C_{2x}(y,0;\xi),$$
$$H_{23}(y,\xi)=-w_{\xi x}(y,0;\xi,\xi),\ H_{24}(y,\xi)=w_x(y,0;\xi,\xi),$$
$$\nu_0(y)=\psi'(y)-A_{2x}(y,0)\psi(0).$$

Дифференцируя (29), получим

$$\tau'(y)=\tau_0'(y)+H_{11}(y,y)\tau(y)+\nu(y)+y\mu(y)+$$
$$+\int_0^y\left[\begin{matrix}H_{11y}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{12y}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{13y}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{14y}(y,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi, \quad (32)$$

Из (32) с учетом (29)–(31), имеем (33)

$$\tau'(y)=z_0(y)+$$
$$+\int_0^y\left[\begin{matrix}H_{01}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{02}(y,\xi)\nu(\xi)d\xi+\\+H_{03}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{04}(y,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi, \quad (33)$$

$$H_{0j}(y,\xi)=H_{11}(y,y)H_{1j}(y,\xi)+$$
$$+H_{2j}(y,\xi)+yH_{3j}(y,\xi)+H_{1jy}(y,\xi),\ j=\overline{1,4},$$
$$z_0(y)=\tau_0'(y)+H_{11}(y,y)\tau_0(y)+\nu_0(y)+y\mu_0(y).$$

Дважды дифференцируя (18) по x, получим

$$u_{xx}(x,y)=A_{2xx}(x,y)\tau(y)+\nu'(x)-$$
$$-\mu(x)+\int_y^x\left[\begin{matrix}B_{2xx}(x,y;\xi)\tau(\xi)+\\+C_{2xx}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\+w_{\xi xx}(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-\\+w_{xx}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{matrix}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_2. \quad (34)$$

Используя условие (4) в (34) и дифференцируя полученное соотношение, будем иметь

$$\chi(y)=$$
$$=W(y)\left\{\begin{array}{l}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]\tau(y)+\\+A_{2xx}(\ell,y)\tau'(y)-C_{2xx}(\ell,y;y)\nu(y)-\\-w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)\mu(y)\end{array}\right\}+$$
$$+W(y)\int\limits_y^\ell\left[\begin{array}{l}B_{2xxy}(\ell,y;\xi)\tau(\xi)+\\+C_{2xxy}(\ell,y;\xi)\nu(\xi)+\\+w_{\xi xxy}(\ell,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-\\-w_{xxy}(\ell,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{array}\right]d\xi-$$
$$-W(y)\varphi_3'(y), \qquad (35)$$

где $W(y)=1/w(\lambda,y;y,y)$.

С учетом соотношений (29)–(31), (33) из (35) получим

$$\chi(y)=$$
$$=\chi_0(y)+\int\limits_0^\ell\left[\begin{array}{l}K_{41}(y,\xi)\tau(\xi)+K_{42}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+K_{43}(y,\xi)\mu(\xi)+K_{44}(y,\xi)\chi(\xi)\end{array}\right]d\xi, \quad (36)$$

$$K_{41}(y,\xi)=\begin{cases}E_1(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\W(y)B_{2xxy}(\ell,y;\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$K_{42}(y,\xi)=\begin{cases}E_2(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\W(y)C_{2xxy}(\ell,y;y),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$K_{43}(y,\xi)=\begin{cases}E_3(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\W(y)w_{\xi xxy}(\ell,y;\xi,\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$K_{44}(y,\xi)=\begin{cases}E_4(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\-W(y)w_{xxy}(\ell,y;\xi,\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$E_j(y,\xi)=$$
$$=W(y)\left\{\begin{array}{l}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]H_{1j}(y,\xi)+\\+A_{2xx}(\ell,y)H_{0j}(y,\xi)-\\-C_{2xx}(\ell,y;\xi)H_{2j}(y,\xi)-\\-w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)H_{3j}(y,\xi)\end{array}\right\},$$
$$j=\overline{1,4}.$$

$$\chi_0(y)=$$
$$=W(y)\left\{\begin{array}{l}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]\tau_0(y)+\\+A_{2xx}(\ell,y)z_0(y)-C_{2xx}(\ell,y;y)\nu_0(y)-\\-w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)\mu_0(y)-\varphi_3'(y)\end{array}\right\}.$$

Таким образом, задача 1 сведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида (29)–(31), (36) относительно функций $\tau(y)$, $\nu(y)$, $\mu(y)$, $\chi(y)$. После определения этих функций решение задачи 1 в области D_2 представляется в виде (19).

Решение системы интегральных уравнений

Систему уравнений (29)–(31), (36) запишем в виде

$$g_i(y)=\rho_i(y)+\sum_{j=1}^4\int\limits_0^\ell K_{ij}(y,\xi)g_j(\xi)d\xi,\ i=\overline{1,4}, \quad (37)$$

где

$$g_1(y)=\tau(y),\ g_2(y)=\nu(y),$$
$$g_3(y)=\mu(y),\ g_4(y)=\chi(y),$$
$$\rho_1(y)=\tau_0(y),\ \rho_2(y)=\nu_0(y),$$
$$\rho_3(y)=\mu_0(y),\ \rho_4(y)=\chi_0(y),$$
$$K_{i1}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i1}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i2}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i2}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i3}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i3}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i4}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i4}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$i=\overline{1,3}.$$

Пусть $M=\max\limits_{0\le i\le4}\left\{\sum\limits_{j=1}^4\max\limits_{0\le y,\xi\le\ell}|K_{ij}(y,\xi)|\right\}$. Если выполняется условие

$$M\ell<1, \qquad (38)$$

тогда система уравнений (37) имеет единственное решение, представимое в виде

$$g_i(y)=\rho_i(y)+\sum_{j=1}^4\int\limits_0^\ell R_j(y,\xi)g_j(\xi)d\xi,\ i=\overline{1,4},$$

где

$$R_{ij}(y,\xi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}K_{ij}^{(n)}(y,\xi),$$
$$K_{ij}^{(1)}(y,\xi)\equiv K_{ij}(y,\xi),\ i,j=\overline{1,4},$$
$$K_{ij}^{(n)}(y,\xi)=$$
$$=\int\limits_0^\ell\left[\begin{array}{l}K_{i1}^{(1)}(y,s)K_{1j}^{(n-1)}(s,\xi)+K_{i2}^{(1)}(y,s)K_{2j}^{(n-1)}(s,\xi)+\\+K_{i3}^{(1)}(y,s)K_{3j}^{(n-1)}(s,\xi)+K_{i4}^{(1)}(y,s)K_{4j}^{(n-1)}(s,\xi)\end{array}\right]ds,$$
$$i,j=\overline{1,4},\ n=2,3,\ldots$$

Таким образом, доказано

Теорема 3. *Если выполняются условия (7)–(10), (24) и (38), то решение задачи 1 существует и единственно.*

Заключение

Из теорем 1, 2 следует, что построением функции Римана для сопряженных задач (задачи Гурса) удается получить представления решения вспомогательных задач, которые существенно используются при решении задачи сопряжения. Условия (24) обеспечивает достаточное условие Фредгольмовости системы (37). Из теоремы 3 вытекает корректность задачи сопряжения. Через функции Римана получены представления решения задачи в явном виде в областях D_1 и D_2 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, С.В. Лемешевский, П.П. Матус // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39. – № 4. – С. 954–962.
2. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. Сер. ФМН. – 2006. – Вып. 42. – С. 11–34.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
5. Кожобеков К.Г. О разрешимости задач сопряжений для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 2. – С. 9–12.
6. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Нелокальная задача с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка // Вестник КРСУ. – 2010. – Т. 10. – С. 150–153.
7. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа // Вестник КНУ. Спец. выпуск. – 2011. – С. 136–138.
8. Sopuev A., Arkabaev N.K. Problems of interface for linear preudoparabolic equations of the third order // Book of Abstracts. The 4th congress of the TWMS. – Baku, Azerbaijan, 1–3 July, 2011. – P. 276.
9. Молдояров У.Д. Нелокальная задача с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 14–17.
10. Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике // Вестник Ошского государственного университета. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – С. 114–121.
11. Сопуев А., Сатаров А.Э. Задачи сопряжений для уравнений в частных производных четвертого порядка с различными действительными характеристиками // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 124–133.
12. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболическо-го уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области // Вестник ОшГУ. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – Вып. III. – С. 122–128.
13. Сопуев А., Сатаров А.Э. Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – Вып. III. – С. 128–138.
14. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 1 (21). – С. 16–23.
15. Сопуев А., Сатаров А.Э. Об одной задаче сопряжения для нелинейных уравнений гиперболического типа четвертого порядка // Вестник Ошского государственного университета. Серия естественных наук. – 2013. – № 1. – С. 252–259.
16. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболических уравнений четвертого порядка // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их проблемы: Тезисы докл. Респ. науч. конф. с участием ученых из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013 г. – Ташкент: НУУ им. М. Улугбека, 2013. – С. 105–106.
17. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М: Наука, 1970. – 296 с.
18. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Об одной задаче сопряжения для псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка // актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Междунар. юбил. науч. конф., посвящ. 20-летию КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова: Тезисы докл. – Бишкек, 5–7 сентября 2013 г. – Бишкек: КРСУ, 2013. – С. 114–115.
19. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдрпараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения // Известия Ошского технологического университета. – 2012. – № 1. – С. 55–59.
20. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

Поступила 24.06.2014 г.