

**Ош мамлекеттик  
университетинин  
ЖАРЧЫСЫ**



**ВЕСТНИК  
Ошского  
государственного  
университета**

**№3 - 2012**

**выпуск III**



**ЗАВЕРЯЮ**  
Университетский секретарь  
Усарова С.О.

ISBN 9967-03-030-5

ТАБИҒЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

22. **Г. Матиева, Ж.А. Артыкова.** Свойства отображения трехмерной поверхности в трехмерную плоскость в евклидовом пространстве ..... 110
23. **Т.Ы. Саадалов.** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике ..... 114
24. **А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов.** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области ..... 122
25. **А. Сопуев, А.Э. Сатаров.** Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка ..... 128
26. **А.К. Тойгонбаева.** Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода ..... 138
27. **А.М. Токторбаев.** Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений реагирующей смеси газов ..... 142
28. **Д.А. Турсунов, Б.М. Шумилов, А.Ж. Кудуев, Э.А. Турсунов.** Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка ..... 147
29. **Э.А. Турсунов, М.В. Колупаев, Б.М. Шумилов.** Применение мультивейвлетов и графического процессора при визуализации данных лазерного сканирования автомобильных дорог ..... 152
30. **А. Халматов.** Аналог метода погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка ..... 157
31. **У.З. Эркебаев, Д.А. Турсунов.** Применение кубических мультивейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана ..... 163
32. **З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Ж.А. Жумакулов.** Исследование и определение параметров аккумулирующих систем, входящих в энергосистему ..... 168
33. **Б.А. Арапов, Б.А. Каденова, М.М. Садырова.** Механизмы радиационного дефектообразования в щелочно - галоидных кристаллах ..... 172
34. **А. Багышев, Ташполотов Ы.,** Фрактальные антенны и методы их проектирования ..... 178
35. **М. К. Жанкуанышев.** Факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали ..... 182
36. **И.А. Калдыбаев, К.Ч. Кожоголов.** Концепция комплексного освоения малых месторождений нерудных строительных материалов Кыргызской Республики ..... 187
37. **Б.Э. Кудайбердиев.** Комбинированная биоэнергетическая установка с двигателем Стирлинга ..... 191
38. **А. Дж. Обозов, С. Насирдинова.** О повышении к. п. д. термосифонной солнечной установки ..... 194
39. **И.А. Ормонова, М.Р. Ормонов.** Моделирование беспроводных сенсорных сетей ..... 197
40. **И.А. Ормонова, М.Р. Ормонов.** Интегральная оценка качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи ..... 205
41. **Ы.Дж. Осмонов, И.Э. Турдуев.** Обоснование параметров устройств для загрузки камеры шерстопресса немойтой шерстью ..... 209
42. **А.Б. Сатыбалдыев, Матисаков Т.К.** Суу ысыгуучу күн коллекторлорунун техникалык экономикалык эффективдүүлүгүн анализдөө ..... 212
43. **К.Т. Шадыханов, З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Р.Ж. Ураимов.** Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС ..... 215



УДК 517.956.6

Сопуев А., ОшГУ, Саадалов Т.Ы., ОшТУ

**Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области**

*Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопараболо-гиперболикалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу областта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселени чечүү шарттары изилденген.*

*Исследованы вопросы разрешимости краевых задач для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области.*

*The problems were researched solvability of boundary value problem for the mixed pseudoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with the nonlocal condition in the curvilinear domain.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $D$  означает криволинейную область, ограниченную линиями  $A_0A_1 : x = 0$ ,  $AA_1 : x = \sigma(y)$ ,  $-h_1 \leq y \leq 0$ ,  $A_1B_1 : y = -h_1$ ,  $B_1B_0 : x = \ell$ ,  $A_0B_0 : y = \mu(x)$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ , а  $D_1 = D \cap (y > 0)$ ,  $D_2 = D \cap (y < 0)$ . Здесь  $\sigma(y)$  - монотонно неубывающая, а  $\mu(x)$  - монотонно невозрастающая гладкие функции (Рис. 1).

Через  $C^{n+m}$  обозначим класс функций, имеющих производные  $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$  ( $r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$ ).

**Задача 1.** Найти функцию  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$ , удовлетворяющую в области  $D_1$  уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xyy} + a_1(x, y)u_{xy} + a_2(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_{xy} + b_3(x, y)u_{yy} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = f_1(x, y), \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u_x(0, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \tag{2}$$

$$u(x, \mu(x)) = \psi(x), 0 \leq x \leq \ell, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области  $D_2$  уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xyx} + \alpha(x, y)u_{xy} + \beta_1(x, y)u_{xx} + \beta_2(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = f_2(x, y), \tag{4}$$

граничным условиям

$$u(\sigma(y), y) = \chi_1(y), -h_1 \leq y \leq 0, \tag{5}$$

$$u(\ell, y) = \chi_2(y), u_x(\ell, y) = \chi_3(y), -h_1 \leq y \leq 0 \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), 0 \leq x \leq \ell, \tag{7}$$

$$u_y(x, +0) = \rho(x)u_y(x, -0) + \int_0^x \theta(x, \xi)u_x(\xi, -0)d\xi + r(x), 0 \leq x \leq \ell, \tag{8}$$

где  $a_i, c_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i$  ( $i=1,2$ ),  $b_j, \chi_j$  ( $j=1,3$ ),  $\alpha, d, \delta, \psi, \rho, \theta, r, \mu, \sigma$  - заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования



$$\begin{aligned}
 & a_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), a_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1), b_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), \\
 & b_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), b_3 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), c_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\
 & c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\bar{D}_1), a_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \delta \in C(\bar{D}_2), \quad (9) \\
 & a_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\
 & \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \\
 & \varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0, h], \psi, \mu, \rho, r \in C^2[0, \ell], \chi_1, \chi_2, \chi_3, \sigma \in C^1[-h_1, 0], \\
 & \theta \in C(\bar{Q}) \cap C^{2+1}(Q), Q = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < \ell\}, h, h_1, \ell > 0, \\
 & \forall x \in [0, \ell] : \rho(x) \neq 0, \forall x \in [0, \ell] : h_2 \leq \mu(x) \leq h, \mu(0) = h, \mu(\ell) = h_2, \quad (10) \\
 & \forall x \in [-h_1, 0] : 0 \leq \sigma(y) \leq \ell_1, \sigma(0) = 0, \sigma(-h_1) = \ell_1, 0 \leq \ell_1 < \ell, 0 < h_2 \leq h, \\
 & \varphi_1(0) = \chi_1(0), \varphi_1(h) = \psi(0).
 \end{aligned}$$

Краевая задача с нелокальным условием сопряжения рассмотрена в работе [1].

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 & u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\
 & u_y(x, +0) = v_1(x), \quad u_y(x, -0) = v_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,
 \end{aligned}$$

(11)

где  $\tau(x), v_1(x), v_2(x)$  - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из условия (8) получим

$$v_1(x) = \rho(x)v_2(x) + \int_0^x \theta(x, \xi)v_2(\xi)d\xi + r(x).$$

(12)

2. Соотношение, принесенное из области  $D_1$ .

Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, +0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

(13)

решение которой представим через функции Римана в виде [2]:

$$\begin{aligned}
 & u(x, y) = A_1(x, y)\varphi_1(y) - \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\varphi_2(\eta) - \\
 & - C_1(x, y; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - D_1(x, y; \xi)\tau''(\xi) + \\
 & + a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - E_1(x, y; \xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1(\xi) - \\
 & - F_1(x, y; \xi)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta,
 \end{aligned} \quad (14)$$

где  $A_1(x, y) = \mathcal{G}_{1\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, y)$ ,

$B_1(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{1\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)$ ,

$C_1(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{1\xi\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\xi\eta}(x, y; 0, \eta) -$

$- a_2(0, \eta)\mathcal{G}_{1\eta\eta}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_{1\xi}(x, y; 0, \eta) +$

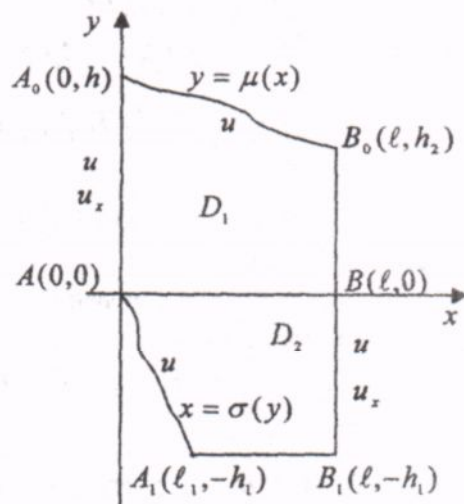


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 &+ [b_2(0, \eta) - a_{1\xi}(0, \eta) - 2a_{2\eta}(0, \eta)] \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, \eta) + \\
 &+ [b_{1\xi}(0, \eta) - a_{1\xi\eta}(0, \eta) - a_{2\eta\eta}(0, \eta) + b_{2\eta}(0, \eta) - c_1(0, \eta)] \mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta), \\
 D_1(x, y; \xi) &= \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) - a_1(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0), \\
 E_1(x, y; \xi) &= a_2(\xi, 0) \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) + [a_{2\eta}(\xi, 0) - b_2(\xi, 0)] \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0), \\
 F_1(x, y; \xi) &= b_3(\xi, 0) \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) + [b_{3\eta}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)] \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0), \\
 &\text{а } \mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta) \text{ - функция Римана для уравнения (1).}
 \end{aligned}$$

С учетом условия (3) из (14) будем иметь соотношение для функции  $\tau(x)$  и  $v_1(x)$ , принесенное из области  $D_1$ :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x [\mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0) v_1''(\xi) - D_1(x, \mu(x); \xi) \tau''(\xi) + \\
 &+ a_2(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0) v_1'(\xi) - E_1(x, \mu(x); \xi) \tau'(\xi) + \\
 &+ b_3(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0) v_1(\xi) - F_1(x, \mu(x); \xi) \tau(\xi)] d\xi = \Phi(x),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\Phi(x) = \psi(x) - A_1(x, \mu(x)) \varphi_1(\mu(x)) + \mathcal{G}_{1\eta}(x, \mu(x); 0, \mu(x)) \varphi_2(\mu(x)) -$

$$\begin{aligned}
 &- \int_0^{\mu(x)} [B_1(x, \mu(x); \eta) \varphi_2(\eta) - C_1(x, \mu(x); \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta - \\
 &- \int_0^x d\xi \int_0^{\mu(x)} \mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, \eta) f_1(\xi, \eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

Осуществляя интегрирование по частям в (15), учитывая свойства функции  $\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)$  и условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0), v_1(0) = \varphi_1'(0), v_1'(0) = \varphi_2'(0),$$

имеем

$$\begin{aligned}
 D_{1\xi}(x, \mu(x); x) \tau(x) - \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0) v_1(x) &= \int_0^x H_1(x, \xi) \tau(\xi) d\xi + \\
 &+ \int_0^x H_2(x, \xi) v_1(\xi) d\xi + \Phi_1(x),
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $H_1(x, \xi) = D_{1\xi\xi}(x, \mu(x); \xi) - E_{1\xi}(x, \mu(x); \xi) + F_1(x, \mu(x); \xi),$

$$\begin{aligned}
 H_2(x, \xi) &= -\mathcal{G}_{\xi\xi}(x, \mu(x); \xi, 0) + a_2(\xi, 0) \mathcal{G}_\xi(x, \mu(x); \xi, 0) + \\
 &+ [a_{2\xi}(\xi, 0) - b_3(\xi, 0)] \mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0), \\
 \Phi_1(x) &= \Phi(x) - [\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); 0, 0) - a_2(0, 0) \mathcal{G}_1(x, \mu(x); 0, 0)] \varphi_1'(0) + \\
 &+ \mathcal{G}_1(x, \mu(x); 0, 0) \varphi_2'(0) + [D_{1\xi}(x, \mu(x); 0) - E_1(x, \mu(x); 0)] \varphi_1(0) - \\
 &- D_1(x, \mu(x); 0) \varphi_2(0).
 \end{aligned}$$

3. Соотношение, принесенное из области  $D_2$ . С другой стороны с учетом постановки задачи 1 и устремляя  $u$  к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\begin{aligned}
 v_2'''(x) + \alpha(x, 0) v_2''(x) + \beta_1(x, 0) \tau''(x) + \beta_2(x, 0) v_2'(x) + \\
 + \gamma_1(x, 0) \tau'(x) + \gamma_2(x, 0) v_2(x) + \delta(x, 0) \tau(x) = f_2(x, 0).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$v_2'''(x) = F(x), \tag{18}$$

где  $F(x) = -\alpha(x,0)v_2''(x) - \beta_1(x,0)\tau''(x) - \beta_2(x,0)v_2'(x) - \gamma_1(x,0)\tau'(x) - \gamma_2(x,0)v_2'(x) - \delta(x,0)\tau(x) + f_2(x,0)$ .

Уравнение (18) будем решать при краевых условиях

$$v_2(0) = \sigma_0, v_2(\ell) = \chi_2'(0), v_2'(\ell) = \chi_3'(0), \tag{19}$$

где  $\sigma_0 = \chi_1'(0) - \varphi_2(0)\sigma'(0)$ .

Введем новую функцию  $z(x)$ :

$$v_2(x) = z(x) + z_0(x) \tag{20}$$

где  $z_0(x) = \frac{\chi_3'(0)}{\ell}(x^2 - \ell x) - \frac{\chi_2'(0) - \sigma_0}{\ell^2}(x^2 - 2\ell x) + \sigma_0$ .

Тогда, относительно  $z(x)$  приходим к задаче

$$\begin{cases} z'''(x) = F(x), \\ z(0) = 0, z(\ell) = 0, z'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Решение задачи (21) представим в виде [3]

$$z(x) = -\int_0^{\ell} G(x, \xi) F(\xi) d\xi, \tag{22}$$

где  $G(x, \xi)$  - функция Грина, определяемая как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi) = 0, \\ G(x, 0) = 0, G(x, \ell) = 0, G'_\xi(x, \ell) = 0, \\ G(x, x+0) - G(x, x-0) = 0, \\ G_\xi(x, x+0) - G_\xi(x, x-0) = 0, \\ G_{\xi\xi}(x, x+0) - G_{\xi\xi}(x, x-0) = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (23) имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{(x-\ell)^2 \xi}{2\ell^2}, & 0 \leq \xi < x, \\ \frac{x(\xi-\ell)(2\ell\xi - x\xi - \ell\xi)}{2\ell^2}, & x < \xi \leq \ell. \end{cases}$$

Тогда с учетом (20) из (22) получим

$$v_2(x) = z_0(x) + \int_0^{\ell} G(x, \xi) [\alpha(\xi,0)v_2''(\xi) + \beta_1(\xi,0)\tau''(\xi) + \beta_2(\xi,0)v_2'(\xi) + \gamma_1(\xi,0)\tau'(\xi) + \gamma_2(\xi,0)v_2'(\xi) + \delta(\xi,0)\tau(\xi)] d\xi + \int_0^{\ell} f_2(\xi,0) d\xi. \tag{24}$$

Осуществляя интегрирование по частям, и учитывая условия согласования (19), из (24) имеем

$$v_2(x) = \int_0^{\ell} H_3(x, \xi) v_2(\xi) d\xi + \int_0^{\ell} H_4(x, \xi) \tau(\xi) d\xi + g_1(x), \tag{25}$$

$$H_3(x, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [\alpha(\xi,0)G(x, \xi)] - \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_2(\xi,0)G(x, \xi)] + \gamma_2(\xi,0)G(x, \xi),$$

$$H_4(x, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [\beta_1(\xi, 0)G(x, \xi)] - \frac{\partial}{\partial \xi} [\gamma_1(\xi, 0)G(x, \xi)] + \delta(\xi, 0)G(x, \xi),$$

$$g_1(x) = z_0(x) - \alpha(\ell, 0)G_\xi(x, \ell)\chi'_2(0) - \beta_1(\ell, 0)G_\xi(x, \ell)\chi'_2(0) + \int_0^\ell G(x, \xi)f_2(\xi, 0)d\xi.$$

Пусть выполняется условие [4]

$$\ell \cdot \max_{0 \leq x, \xi \leq \ell} |H_3(x, \xi)| < 1. \quad (26)$$

Тогда, обращая интегральное уравнение (25) относительно  $v_2(x)$ , с учетом (26), приходим к следующему соотношению

$$v_2(x) = g_2(x) + \int_0^\ell H_5(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (27)$$

где  $H_5(x, \xi) = H_4(x, \xi) + \int_0^\ell R_1(x, s)H_4(s, \xi)ds$ ,  $g_2(x) = g_1(x) + \int_0^x R_1(x, s)g_1(s)ds$ , а  $R_1(x, s)$  - резольвента ядра  $H_3(x, \xi)$ .

4. Сведение к интегральному уравнению. В силу (27) из (12) имеем

$$v_1(x) = g_3(x) + \int_0^\ell H_6(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (28)$$

где  $H_6(x, \xi) = \rho(x)H_5(x, \xi) + \int_0^x \theta(x, t)H_5(t, \xi)dt$ ,

$$g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + \int_0^x \theta(x, t)g_2(t)dt + r(x).$$

Исключив  $v_1(x)$  из соотношений (16) и (28), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = g_4(x) + \int_0^\ell H_1(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^\ell K_1(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (29)$$

где  $\rho_1(x) = 1 - 2a_1(x, 0)\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0) - \int_0^{\mu(x)} b_1(x, t)\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, t)dt$ ,

$$K_1(x, \xi) = \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0)H_6(x, \xi) + \int_0^x H_2(x, s)H_6(s, \xi)ds,$$

$$g_4(x) = \Phi_1(x) + \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0)g_3(x) + \int_0^x H_2(x, \xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если

$$\forall x \in [0, \ell]: \rho_1(x) \neq 0, \quad (30)$$

то уравнение (29) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1: b_1(x, y) - a_{1y}(x, y) \leq 0, \quad (31)$$

то

$$\forall x \in [0, \ell], \forall \eta \in [0, \mu(x)]: \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, \eta) \leq 0. \quad (32)$$

Если

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1: b_1(x, y) \geq 0, \forall x \in [0, \ell]: \alpha_1(x, 0) \geq 0, \quad (33)$$

то в силу (32) имеем

$$\forall x \in [0, \ell]: \rho_1(x) \geq 1. \tag{34}$$

В частности, если  $\alpha_1(x, 0) \equiv 0$ ,  $b_1(x, y) \equiv 0$ , то  $\rho(x) = 1$ , и, следовательно, условие (30) или (34) выполняется.

При выполнении условия (34), разделив обе части уравнения (29) на  $\rho_1(x)$ , и обращая Вольтерровскую часть полученного уравнения, будем иметь

$$\tau(x) = g(x) + \int_0^{\ell} K(x, \xi) \tau(\xi) d\xi, \tag{35}$$

где  $K(x, \xi) = \frac{K_1(x, \xi)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \frac{K_1(t, \xi)}{\rho_1(t)} R_2(x, t) dt$ ,  $g(x) = \frac{g_1(x)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \frac{g_1(t)}{\rho_1(t)} R_2(x, t) dt$ , а  $R_2(x, t)$  - резольвента ядра  $\frac{H_1(x, \xi)}{\rho_1(x)}$ .

Если

$$\ell \cdot \max_{0 \leq x, \xi \leq \ell} |K(x, \xi)| < 1, \tag{36}$$

то уравнение (35) допускает единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений [4].

Определив  $\tau(x)$ , из соотношения (28) будем знать  $v_1(x)$ . Тогда решение задачи 1 в области  $D_1$  представим в виде (14).

**5. Решение задачи 1 в области  $D_2$ .** Решение задачи 1 в области  $D_2$  определяется как решение следующей задачи (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям  $u(x, 0) = \tau(x)$ , (5) и (6).

Для решения этой задачи воспользуемся задачей Гурса для уравнения (4), удовлетворяющего условиям (6) и

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x \leq \ell, u_x(\ell, y) = \chi(y), -h_1 \leq y \leq 0, \tag{37}$$

где  $\chi(y)$  - пока неизвестная функция.

Решение указанной задачи Гурса в области  $D_2$ , через функции Римана, определяется по формуле [2]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; x, 0) \tau(x) + \int_x^{\ell} A_2(x, y; \xi) \tau(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^y [\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta) \chi'(\eta) - B_2(x, y; \eta) \chi'_3(\eta) + \beta_1(\ell, \eta) \mathcal{G}_2(x, y; \ell, \eta) \chi_3(\eta) + \\ & + D_2(x, y; \eta) \chi'_2(\eta) + E_2(x, y; \eta) \chi_2(\eta)] d\eta + \int_x^{\ell} d\xi \int_0^y \mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta) d\eta, \end{aligned} \tag{38}$$

где  $A_2(x, y; \xi) = \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; \xi, 0) - \alpha(\xi, 0) \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_2(\xi, 0) - 2\alpha_\xi(\xi, 0)] \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_{2\xi}(\xi, 0) - \gamma_2(\xi, 0) - \alpha_{\xi\xi}(\xi, 0)] \mathcal{G}_2(x, y; \xi, 0)$ ,

$$B_2(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; \ell, \eta) - \alpha(\ell, \eta) \mathcal{G}_2(x, y; \ell, \eta),$$

$$D_2(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; \ell, \eta) - \alpha(\ell, \eta) \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; \ell, \eta) - [\alpha_\xi(\ell, \eta) - \beta_2(\ell, \eta)] \mathcal{G}_2(x, y; \ell, \eta),$$

$$E_2(x, y; \eta) = -\beta_1(\ell, \eta) \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; \ell, \eta) + [\beta_{1\xi}(\ell, \eta) - \gamma_1(\ell, \eta)] \mathcal{G}_2(x, y; \ell, \eta).$$

а  $\mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta)$  - функция Римана для уравнения (4).

Учитывая краевое условие (5), из (38) придем к уравнению



$$\rho_2(y)\chi(y) = T(y) + \int_0^y E(y,\eta)\chi(\eta)d\eta \quad (39)$$

где  $\rho_2(y) = \mathcal{G}_2(\sigma(y), y; \ell, y)$ ,  $E(y, \eta) = \mathcal{G}_{2\eta}(\sigma(y), y; \ell, \eta)$ ,  
 $T(y) = \chi_1(y) + \mathcal{G}_2(\sigma(y), y; \ell, 0)\tau''(\ell) - \mathcal{G}_{2\sigma}(\sigma(y), y; \sigma(y), 0)\tau(\sigma(y)) -$   
 $- \int_{\sigma(y)}^{\ell} A_2(\sigma(y), y; \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^y [B_2(x, y; \eta)\chi_3'(\eta) - \beta_1(\ell, \eta)\mathcal{G}_2(x, y; \ell, \eta)\chi_3(\eta) -$   
 $- D_2(x, y; \eta)\chi_2'(\eta) - E_2(x, y; \eta)\chi_2(\eta)]d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta)d\eta.$

При выполнении условия

$$\forall y \in [-h_1, 0]: \rho_2(y) \neq 0, \quad (40)$$

уравнение (39) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив, отсюда  $\chi(y)$ , и подставляя ее в (38) найдем решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1.

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Если выполняются условия (9), (10), (26), (31), (33), (36) и (40), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях  $D_1$  и  $D_2$  по формулам (14) и (38) соответственно.

#### Литература

1. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
4. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 232 с.

УДК 517.956.6



**ЗАВЕРЯЮ**

Ученый секретарь

ОшГУ *Усан Сопуев А.*, Сатаров А.Э., ОшГУ

#### Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка

*Төртүнчү тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу теңдемелер үчүн жабыштыруу маселесинин бир гана чечиминин жашашы далилденген.*

*Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка.*

*Existence of the unique solution of a problem of coupling for the nonlinear equations in private derivatives of the fourth order.*

**1. Постановка задачи.** Математические модели многих процессов, происходящих в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами, часто сводятся к задачам сопряжений для уравнений в частных производных второго, третьего и более высокого порядков с различными характеристиками в рассматриваемой области.

В области  $D$ , ограниченной отрезками прямых  $AC: x + y = 0$ ,  $CB: x - y = \ell$ ,  $BB_0: x = \ell$ ,  $B_0A_0: y = h$ ,  $A_0A: x = 0$ , рассмотрим задачу сопряжения для уравнений