Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК Ошского государственного университета

№3 - 2012
выпуск III

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

ISBN 9967-03-030-5

ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

ЗАВЕРЯЮ
...ный секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

УДК 517.956.6

Сопуев А., ОшГУ, Саадалов Т.Ы., ОшТУ

Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопарабола-гиперболалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу областта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселени чечүү шарттары изилденген.

Исследованы вопросы разрешимости краевых задач для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области.

The problems were researched solvability of boundary value problem for the mixed psevdoparabolo - hyperbolic equation of the fourth order with the nonlocal condition in the curvilinear domain.

1. Постановка задачи. Пусть D означает криволинейную область, ограниченную линиями $A_0A: x=0$, $AA_1: x=\sigma(y), -h_1 \le y \le 0$, $A_1B_1: y=-h_1$, $B_1B_0: x=\ell$, $A_0B_0: y=\mu(x), 0\le x\le \ell$, а $D_1 = D\cap(y>0), D_2 = D\cap(y<0)$. Здесь $\sigma(y)$ - монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ - монотонно невозрастающая гладкие функции (Рис. 1).

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s\ (r=0,1,...,\ n;\ s=0,1,...,\ m)$.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} + \\ + b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y), \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \quad (2)$$

$$u(x,\mu(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (3)$$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \alpha(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \\ + \beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = f_2(x,y), \quad (4)$$

граничным условиям

$$u(\sigma(y),y)=\chi_1(y),\ -h_1\le y\le 0, \quad (5)$$

$$u(\ell,y)=\chi_2(y),\ u_x(\ell,y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0 \quad (6)$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \quad (7)$$

$$u_y(x,+0)=\rho(x)u_y(x,-0)+\int_0^x \theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi + r(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (8)$$

где $a_i, c_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i\ (i=1,2)$, $b_j, \chi_j\ (j=\overline{1,3})$, $\alpha, d, \delta, \psi, \rho, \theta, r, \mu, \sigma$ - *заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования*

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

$$a_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), a_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1), b_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1),$$
$$b_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), b_3 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1),$$
$$c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\overline{D}_1), \alpha_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \delta \in C(\overline{D}_2), \quad (9)$$
$$\alpha_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2),$$
$$\gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2),$$
$$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0,h],\ \psi, \mu, \rho, r \in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3, \sigma \in C^1[-h_1,0],$$
$$\theta \in C(\overline{Q}) \cap C^{2+1}(Q), Q = \{(x,t): 0 < x < \ell,\ 0 < t < \ell\}, h, h_1, \ell > 0,$$
$$\forall x \in [0,\ell]: \rho(x) \neq 0,\ \forall x \in [0,\ell]: h_2 \le \mu(x) \le h,\ \mu(0) = h,\ \mu(\ell) = h_2, \quad (10)$$
$$\forall x \in [-h_1, 0]: 0 \le \sigma(y) \le \ell_1,\ \sigma(0) = 0,\ \sigma(-h_1) = \ell_1, 0 \le \ell_1 < \ell,\ 0 < h_2 \le h,$$
$$\varphi_1(0) = \chi_1(0),\ \varphi_1(h) = \psi(0).$$

Краевая задача с нелокальным условием сопряжения рассмотрена в работе [1].

Введем следующие обозначения

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell,$$
$$u_y(x,+0) = \nu_1(x),\ u_y(x,-0) = \nu_2(x),\ 0 \le x \le \ell, \quad (11)$$

где $\tau(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ - пока неизвестные функции.

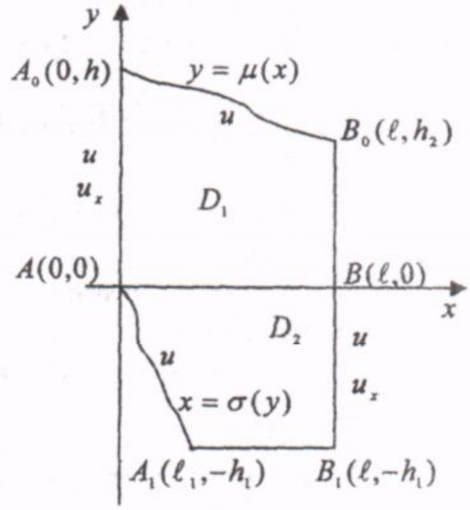

Рис. 1.

Тогда в силу постановки задачи 1 из условия (8) получим

$$\nu_1(x) = \rho(x)\nu_2(x) + \int_0^x \theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + r(x). \quad (12)$$

2. Соотношение, принесенное из области D_1. Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0) = \tau(x), u_y(x,+0) = \nu_1(x), 0 \le x \le \ell, \quad (13)$$

решение которой представим через функции Римана в виде [2]:

$$u(x,y) = A_1(x,y)\varphi_1(y) - \vartheta_{1\eta}(x,y;0,y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta) -$$
$$- C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi) - D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi) + \quad (14)$$
$$+ a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1'(\xi) - E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi) -$$
$$- F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta,$$

где $A_1(x,y) = \vartheta_{1\eta\xi}(x,y;0,y) - a_2(0,y)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y)$,

$$B_1(x,y;\eta) = \vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta) + [b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$C_1(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta) -$$
$$- a_2(0,\eta)\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta) + [b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) +$$

$$+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+$$
$$+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1).

С учетом условия (3) из (14) будем иметь соотношение для функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$\int_0^x[\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,\mu(x);\xi)\tau''(\xi)+$$
$$+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,\mu(x);\xi)\tau'(\xi)+ \tag{15}$$
$$+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)\nu_1(\xi)-F_1(x,\mu(x);\xi)\tau(\xi)]d\xi=\Phi(x),$$

где $\Phi(x)=\psi(x)-A_1(x,\mu(x))\varphi_1(\mu(x))+\vartheta_{1\eta}(x,\mu(x);0,\mu(x))\varphi_2(\mu(x))-$
$$-\int_0^{\mu(x)}[B_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_2(\eta)-C_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta-$$
$$-\int_0^x d\xi\int_0^{\mu(x)}\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (15), учитывая свойства функции $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau'(0)=\varphi_2(0),\ \nu_1(0)=\varphi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\varphi_2'(0),$$

имеем

$$D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau(x)-\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)\nu_1(x)=\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x), \tag{16}$$

где $H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi)-E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi)+F_1(x,\mu(x);\xi),$
$$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_\xi(x,\mu(x);\xi,0)+$$
$$+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$$
$$\Phi_1(x)=\Phi(x)-[\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0)-a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0)+$$
$$+\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0)+[D_{1\xi}(x,\mu(x);0)-E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0)-$$
$$-D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$$

3. Соотношение, принесенное из области D_2. С другой стороны с учетом постановки задачи 1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\nu_2'''(x)+\alpha(x,0)\nu_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau''(x)+\beta_2(x,0)\nu_2'(x)+$$
$$+\gamma_1(x,0)\tau'(x)+\gamma_2(x,0)\nu_2(x)+\delta(x,0)\tau(x)=f_2(x,0). \tag{17}$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$\nu_2'''(x) = F(x), \tag{18}$$

где $F(x) = -\alpha(x,0)\nu_2''(x) - \beta_1(x,0)\tau''(x) - \beta_2(x,0)\nu_2'(x) -$
$- \gamma_1(x,0)\tau'(x) - \gamma_2(x,0)\nu_2'(x) - \delta(x,0)\tau(x) + f_2(x,0)$..

Уравнение (18) будем решать при краевых условиях

$$\nu_2(0) = \sigma_0,\ \nu_2(\ell) = \chi_2'(0),\ \nu_2'(\ell) = \chi_3'(0), \tag{19}$$

где $\sigma_0 = \chi_1'(0) - \varphi_2(0)\sigma'(0)$.

Введем новую функцию $z(x)$:

$$\nu_2(x) = z(x) + z_0(x) \tag{20}$$

где $z_0(x) = \dfrac{\chi_3'(0)}{\ell}(x^2 - \ell x) - \dfrac{\chi_2'(0) - \sigma_0}{\ell^2}(x^2 - 2\ell x) + \sigma_0$.

Тогда, относительно $z(x)$ приходим к задаче

$$\begin{cases} z'''(x) = F(x), \\ z(0) = 0,\ \ z(\ell) = 0,\ \ z'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Решение задачи (21) представим в виде [3]

$$z(x) = -\int_0^\ell G(x,\xi)F(\xi)d\xi, \tag{22}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, определяемая как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} G_{\xi\xi\xi}'''(x,\xi) = 0, \\ G(x,0) = 0,\ G(x,\ell) = 0,\ \ G_\xi'(x,\ell) = 0, \\ G(x,x+0) - G(x,x-0) = 0, \\ G_\xi(x,x+0) - G_\xi(x,x-0) = 0, \\ G_{\xi\xi}(x,x+0) - G_{\xi\xi}(x,x-0) = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (23) имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{(x-\ell)^2\xi}{2\ell^2},\ \ 0 \le \xi < x, \\ \dfrac{x(\xi-\ell)(2\ell\xi - x\xi - \ell\xi}{2\ell^2},\ x < \xi \le \ell. \end{cases}$$

Тогда с учетом (20) из (22) получим

$$\nu_2(x) = z_0(x) + \int_0^\ell G(x,\xi)[\alpha(\xi,0)\nu_2''(\xi) + \beta_1(\xi,0)\tau''(\xi) + \beta_2(\xi,0)\nu_2'(\xi) +$$
$$+ \gamma_1(\xi,0)\tau'(\xi) + \gamma_2(\xi,0)\nu_2'(\xi) + \delta(\xi,0)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^\ell f_2(\xi,0)d\xi. \tag{24}$$

Осуществляя интегрирование по частям, и учитывая условия согласования (19), из (24) имеем

$$\nu_2(x) = \int_0^\ell H_3(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + \int_0^\ell H_4(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + g_1(x), \tag{25}$$

где $H_3(x,\xi) = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}[\alpha(\xi,0)G(x,\xi)] - \dfrac{\partial}{\partial\xi}[\beta_2(\xi,0)G(x,\xi)] + \gamma_2(\xi,0)G(x,\xi)$,

$$H_4(x,\xi)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[\beta_1(\xi,0)G(x,\xi)]-\frac{\partial}{\partial\xi}[\gamma_1(\xi,0)G(x,\xi)]+\delta(\xi,0)G(x,\xi),$$

$$g_1(x)=z_0(x)-\alpha(\ell,0)G_\xi(x,\ell)\chi_2'(0)-\beta_1(\ell,0)G_\xi(x,\ell)\chi_2'(0)+\int_0^\ell G(x,\xi)f_2(\xi,0)d\xi .$$

Пусть выполняется условие [4]

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le\ell}|H_3(x,\xi)|<1. \qquad (26)$$

Тогда, обращая интегральное уравнение (25) относительно $v_2(x)$, с учетом (26), приходим к следующему соотношению

$$v_2(x)=g_2(x)+\int_0^\ell H_5(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (27)$$

где $H_5(x,\xi)=H_4(x,\xi)+\int_0^\ell R_1(x,s)H_4(s,\xi)ds,\quad g_2(x)=g_1(x)+\int_0^x R_1(x,s)g_1(s)ds,$ а $R_1(x,s)$ - резольвента ядра $H_3(x,\xi)$.

4. Сведение к интегральному уравнению. В силу (27) из (12) имеем

$$v_1(x)=g_3(x)+\int_0^\ell H_6(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (28)$$

где $$H_6(x,\xi)=\rho(x)H_5(x,\xi)+\int_0^x\theta(x,t)H_5(t,\xi)dt,$$

$$g_3(x)=\rho(x)g_2(x)+\int_0^x\theta(x,t)g_2(t)dt+r(x).$$

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (16) и (28), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x)=g_4(x)+\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^\ell K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (29)$$

где $$\rho_1(x)=1-2a_1(x,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)-\int_0^{\mu(x)}b_1(x,t)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,t)dt,$$

$$K_1(x,\xi)=\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)H_6(x,\xi)+\int_0^x H_2(x,s)H_6(s,\xi)ds,$$

$$g_4(x)=\Phi_1(x)+\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)g_3(x)+\int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \rho_1(x)\ne0, \qquad (30)$$

то уравнение (29) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_1: b_1(x,y)-a_{1y}(x,y)\le0, \qquad (31)$$

то

$$\forall\ x\in[0,\ell],\ \forall\eta\in[0,\mu(x)]:\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta)\le0. \qquad (32)$$

Если

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_1: b_1(x,y)\ge0, \forall x\in[0,\ell]:\alpha_1(x,0)\ge0, \qquad (33)$$

то в силу (32) имеем

$$\forall x \in [0,\ell]: \rho_1(x) \ge 1. \qquad (34)$$

В частности, если $\alpha_1(x,0) \equiv 0$, $b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (30) или (34) выполняется.

При выполнении условия (34), разделив обе части уравнения (29) на $\rho_1(x)$, и обращая Вольтерровскую часть полученного уравнения, будем иметь

$$\tau(x) = g(x) + \int_0^\ell K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (35)$$

где $K(x,\xi) = \dfrac{K_1(x,\xi)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \dfrac{K_1(t,\xi)}{\rho_1(t)} R_2(x,t)dt$, $g(x) = \dfrac{g_4(x)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \dfrac{g_4(t)}{\rho_1(t)} R_2(x,t)dt$, а $R_2(x,t)$ - резольвента ядра $\dfrac{H_1(x,\xi)}{\rho_1(x)}$.

Если

$$\ell \cdot \max_{0\le x,\xi\le \ell} |K(x,\xi)| < 1, \qquad (36)$$

то уравнение (35) допускает единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений [4].

Определив $\tau(x)$, из соотношения (28) будем знать $\nu_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 представим в виде (14).

5. Решение задачи 1 в области D_2. Решение задачи 1 в области D_2 определяется как решение следующей задачи (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $u(x,0) = \tau(x)$, (5) и (6).

Для решения этой задачи воспользуемся задачей Гурса для уравнения (4), удовлетворяющего условиям (6) и

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le \ell, u_{xx}(\ell,y) = \chi(y), -h_1 \le x \le 0, \qquad (37)$$

где $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение указанной задачи Гурса в области D_2, через функции Римана, определяется по формуле [2]

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \vartheta_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x) + \int_x^\ell A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi + \\ & + \int_0^y [\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi'(\eta) - B_2(x,y;\eta)\chi_3'(\eta) + \beta_1(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta)\chi_3(\eta) + \\ & + D_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta) + E_2(x,y;\eta)\chi_2(\eta)]d\eta + \int_\ell^x d\xi \int_0^y \vartheta_2(x,y;\xi,\eta)d\eta, \end{aligned} \qquad (38)$$

где $A_2(x,y;\xi) = \vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0) - \alpha(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_2(\xi,0) -$

$- 2\alpha_\xi(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_{2\xi}(\xi,0) - \gamma_2(\xi,0) - \alpha_{\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(x,y;\xi,0),$

$B_2(x,y;\eta) = \vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta) - \alpha(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta),$

$D_2(x,y;\eta) = \vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\ell,\eta) - \alpha(\ell,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta) - [\alpha_\xi(\ell,\eta) - \beta_2(\ell,\eta)]\vartheta_2(x,y;\ell,\eta),$

$E_2(x,y;\eta) = -\beta_1(\ell,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta) + [\beta_{1\xi}(\ell,\eta) - \gamma_1(\ell,\eta)]\vartheta_2(x,y;\ell,\eta).$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Учитывая краевое условие (5), из (38) придем к уравнению

$$\rho_2(y)\chi(y)=T(y)+\int_0^y E(y,\eta)\chi(\eta)d\eta \tag{39}$$

где $\rho_2(y)=\vartheta_2(\sigma(y),y;\ell,y)$, $E(y,\eta)=\vartheta_{2\eta}(\sigma(y),y;\ell,\eta)$,

$$T(y)=\chi_1(y)+\vartheta_2(\sigma(y),y;\ell,0)\tau''(\ell)-\vartheta_{2\xi\xi}(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau(\sigma(y))-$$

$$-\int_{\sigma(y)}^{\ell}A_2(\sigma(y),y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^y[B_2(x,y;\eta)\chi_3'(\eta)-\beta_1(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta)\chi_3(\eta)-$$

$$-D_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta)-E_2(x,y;\eta)\chi_2(\eta)]d\eta-\int_\ell^x d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)d\eta.$$

При выполнении условия

$$\forall y\in[-h_1,0]:\ \rho_2(y)\neq 0, \tag{40}$$

уравнение (39) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив, отсюда $\chi(y)$, и подставляя ее в (38) найдем решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если выполняются условия (9), (10), (26), (31), (33), (36) и (40), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (14) и (38) соответственно.*

Литература

1. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
4. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 232 с.

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшГУ

УДК 517.956.6

Сопуев А., Сатаров А.Э., ОшГУ

Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертогопорядка

Төртүнчү тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу теңдемелер үчүн жабыштыруу маселесинин бир гана чечиминин жашашы далилденген.

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Existence of the unique solution of a problem of coupling for the nonlinear equations in private derivatives of the fourth order.

1. Постановка задачи. Математические модели многих процессов, происходящих в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами, часто сводятся к задачам сопряжений для уравнений в частных производных второго, третьего и более высокого порядков с различными характеристиками в рассматриваемой области.

В области D, ограниченной отрезками прямых $AC: x+y=0,$, $CB: x-y=\ell$, $BB_0: x=\ell$, $B_0A_0: y=h$, $A_0A: x=0$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений