

Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ



ВЕСТНИК Ошского государственного университета

№3 - 2012
выпуск III

ISBN 9967-03-030-5



ТАБИГЫИ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

ЗАВЕРЯЮ
ученый секретарь
ОшТУ *Усарова* Усарова С.О.

22. **Г. Матиева, Ж.А. Артыкова.** Свойства отображения трехмерной поверхности в трехмерную плоскость в евклидовом пространстве 110
23. **Т.Ы. Саадалов.** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике 114
24. **А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов.** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области 122
25. **А. Сопуев, А.Э. Сатаров.** Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка 128
26. **А.К. Тойгонбаева.** Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода 138
27. **А.М. Токторбаев.** Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений реагирующей смеси газов 142
28. **Д.А. Турсунов, Б.М. Шумилов, А.Ж. Кудуев, Э.А. Турсунов.** Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка 147
29. **Э.А. Турсунов, М.В. Колупаев, Б.М. Шумилов.** Применение мультивейвлетов и графического процессора при визуализации данных лазерного сканирования автомобильных дорог 152
30. **А. Халматов.** Аналог метода погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка 157
31. **У.З. Эркебаев, Д.А. Турсунов.** Применение кубических мультивейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана 163
32. **З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Ж.А. Жумакулов.** Исследование и определение параметров аккумулирующих систем, входящих в энергосистему 168
33. **Б.А. Арапов, Б.А. Каденова, М.М. Садырова.** Механизмы радиационного дефектообразования в щелочно - галоидных кристаллах 172
34. **А. Багышев, Ташполотов Ы.,** Фрактальные антенны и методы их проектирования 178
35. **М. К. Жанкуанышев.** Факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали 182
36. **Н.А. Калдыбаев, К.Ч. Кожоголов.** Концепция комплексного освоения малых месторождений нерудных строительных материалов Кыргызской Республики 187
37. **Б.Э. Кудайбердиев.** Комбинированная биоэнергетическая установка с двигателем Стирлинга 191
38. **А. Дж. Обозов, С. Насирдинова.** О повышении к. п. д. термосифонной солнечной установки 194
39. **И.А. Ормонова, М.Р. Ормонов.** Моделирование беспроводных сенсорных сетей 197
40. **И.А. Ормонова, М.Р. Ормонов.** Интегральная оценка качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи 205
41. **Ы.Дж. Осмонов, И.Э. Турдуев.** Обоснование параметров устройств для загрузки камеры шерстопресса невытой шерстью 209
42. **А.Б. Сатыбалдыев, Матисаков Т.К.** Суу ысытуучу күн коллекторлорунун техникалык экономикалык эффективдүүлүгүн анализдөө 212
43. **К.Т. Шадыханов, З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Р.Ж. Ураимов.** Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС 215



ЗАБЕРЯЮ

Ученый секретарь

Усарава С.О.

Усарава С.О.

Выясним геометрический смысл равенства $\sum_i t_{ai}^i = 0$ (т.е. $Q_{a0} = 0$).

Псевдофокус [3] F_α^i прямой (X, \bar{e}_α) определяется радиус-вектором:

$$\bar{F}_\alpha^i = \bar{X} - \frac{1}{t_{ai}^i} \bar{e}_\alpha.$$

На каждой прямой (X, \bar{e}_α) имеем по три псевдофокуса: $F_\alpha^1, F_\alpha^2, F_\alpha^3$. Гармонический полюс [4] трех точек F_α^i ($i = 1, 2, 3$) обозначим через F_α и он определяется следующим радиус вектором:

$$\bar{F}_\alpha = \bar{X} + \frac{1}{\sum_i t_{ai}^i} \bar{e}_\alpha.$$

Следовательно, если $Q_{a0} = 0$, то гармонический полюс $F_\alpha \in (X, \bar{e}_\alpha)$ является бесконечно удаленной точкой расширенного евклидова пространства \bar{E}_7 . Верно и обратное, т.е. если точка F_α является бесконечно удаленной точкой, то $Q_{a0} = 0$, т.е. вторая поляра точки X относительно фокусной поверхности графика V_3^* имеет центр в точке X .

Литература

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. – М., 1948. - 365с.
2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. – 1966. – Т.6, №4, - С. 475-491.
3. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. // Вопросы дифференциальной геометрии. Т.1. №374. уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, С. 65-70.
4. Казанова Н.В. О гармоническом полюсе. РЖ мат., 1956, №6, С.104.

УДК 517.956.6

Саадалов Т.Ы., ОшТУ

Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопараболо-гиперболалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу үч бурчтукта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселенин жалгыз чечиминин жашашы далилденген.

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике.

Unequivocal resolvability of boundary value problem for the mixed pseudoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with not local condition of interface in a curvilinear triangle is proved.

1. **Постановка задачи.** Пусть D означает криволинейный треугольник, ограниченной линиями $A_0A_1: x = 0, -h_1 \leq y \leq 0, A_1B: x = \sigma(y), -h_1 \leq y \leq 0, BA_0: y = \mu(x), 0 \leq x \leq \ell$, а $D_1 = D \cap \{y > 0\}, D_2 = D \cap \{y < 0\}$ (Рис. 1). Здесь



$\sigma(y)$ - монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ - монотонно невозрастающая функции. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$).

Задача 1. Найдите функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xyy} + a_1(x, y)u_{xy} + a_2(x, y)u_{xy} + b_1(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_{xy} + b_3(x, y)u_{yy} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = f_1(x, y), \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, \mu(x)) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xxx} + \alpha_1(x, y)u_{xxx} + \alpha_2(x, y)u_{xyy} + \beta_1(x, y)u_{xx} + \beta_2(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = f_2(x, y), \quad (4)$$

граничным условиям

$$u_x(0, y) = \chi_1(y), \quad u_{xx}(0, y) = \chi_2(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5)$$

$$u(\sigma(y), y) = \chi_3(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (6)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$u_y(x, +0) = \rho(x)u_y(x, -0) + \int_0^x \theta(x, \xi)u_y(\xi, -0)d\xi + r(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (7)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i (i = 1, 2), b_j, \chi_j (j = \overline{1, 3}), d, \delta, \psi, \mu, \sigma, \rho, \theta, r$ - заданные функции, причем для них выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} a_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), \quad a_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1), \quad b_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), \\ b_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), \quad b_3 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), \quad c_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), \quad d \in C(\bar{D}_1), \quad \alpha_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \quad \delta \in C(\bar{D}_2), \\ \alpha_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \quad \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), \quad \beta_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \quad \gamma_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0, h], \psi, \mu, \rho, r \in C^2[0, \ell], \chi_1, \chi_2, \chi_3, \sigma \in C^1[-h_1, 0], \\ \theta \in C(\bar{Q}) \cap C^{2+1}(Q), Q = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < \ell\}, \\ \forall x \in [0, \ell] : \rho(x) \neq 0, \forall x \in [0, \ell] : 0 \leq \mu(x) \leq h, \mu(0) = h, \mu(\ell) = 0, \\ \forall x \in [-h_1, 0] : 0 \leq \sigma(y) \leq \ell, \sigma(-h_1) = 0, \sigma(0) = \ell, h, h_1, \ell > 0, \\ \varphi_2(0) = \chi_1(0), \psi(\ell) = \chi_3(0), \varphi_1(h) = \psi(0). \end{aligned} \tag{9}$$

Задача 1 в прямоугольной области при $\rho(x) \equiv 1, \theta(x, t) \equiv r(x) \equiv 0$ рассмотрена в [1]. Особенностью данной задачи заключается в том, что краевые условия задаются по всей границе области, поэтому ее можно называть задачей типа задачи Дирихле.

Такие задачи с нелокальными условиями сопряжения могут быть математической моделью процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [2, 3].

Уравнения (1) и (4) в области D в силу условия сопряжения (7) является уравнением смешанного типа [4].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), 0 \leq x \leq \ell, \\ u_y(x, +0) = v_1(x), u_y(x, -0) = v_2(x), 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned}$$

где $\tau(x), v_1(x), v_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (7) получим

$$v_1(x) = \rho(x)v_2(x) + \int_0^x \theta(x, \xi)v_2(\xi)d\xi + r(x), \tag{11}$$

Если удастся определить функции $\tau(x), v_1(x), v_2(x)$, то решение задачи 1 сводится к определению решения уравнений (1) и (4) в областях D_1 и D_2 соответственно.

2. Соотношение, принесенное из области D_1 . Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x, 0) = \tau(x), u_y(x, +0) = v_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \tag{12}$$

Решение этой задачи с помощью функции Римана имеет следующее представление [1]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = A_1(x, y)\varphi_1(y) - \mathcal{G}_\eta(x, y; 0, y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\varphi_2(\eta) - \\ - C_1(x, y; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - D_1(x, y; \xi)\tau'(\xi) + \\ + a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - E_1(x, y; \xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)v_1(\xi) - \\ - F_1(x, y; \xi)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\xi, \end{aligned} \tag{13}$$

где

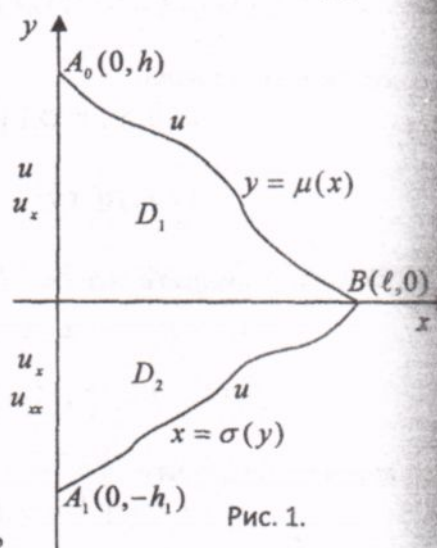


Рис. 1.

(10)

$$\begin{aligned}
 A_1(x, y) &= \mathcal{G}_{1\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, y), \\
 B_1(x, y; \eta) &= \mathcal{G}_{1\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta), \\
 C_1(x, y; \eta) &= \mathcal{G}_{1\xi\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\xi\eta}(x, y; 0, \eta) - \\
 &- a_2(0, \eta)\mathcal{G}_{1\eta\xi}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_{1\xi}(x, y; 0, \eta) + \\
 &+ [b_2(0, \eta) - a_{1\xi}(0, \eta) - 2a_{2\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; 0, \eta) + \\
 &+ [b_{1\xi}(0, \eta) - a_{1\xi\eta}(0, \eta) - a_{2\eta\eta}(0, \eta) + b_{2\eta}(0, \eta) - c_1(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta), \\
 D_1(x, y; \xi) &= \mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) - a_1(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0), \\
 E_1(x, y; \xi) &= a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) + [a_{2\eta}(\xi, 0) - b_2(\xi, 0)]\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0), \\
 F_1(x, y; \xi) &= b_3(\xi, 0)\mathcal{G}_{1\eta}(x, y; \xi, 0) + [b_{3\eta}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)]\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0),
 \end{aligned}$$

а $\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана для уравнения (1).

Используя условие (3) из (13) получаем интегро-дифференциальное соотношение для функции $\tau(x)$ и $v_1(x)$:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x [\mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0)v_1''(\xi) - D_1(x, \mu(x); \xi)\tau''(\xi) + a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, \mu(x); \\
 &\xi, 0)v_1'(\xi) - E_1(x, \mu(x); \xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi, 0)\mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0)v_1(\xi) - \\
 &- F_1(x, \mu(x); \xi)\tau(\xi)]d\xi = \Phi_1(x),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(x) &= \psi(x) - A_1(x, \mu(x))\varphi_1(\mu(x)) + \mathcal{G}_\eta(x, \mu(x); 0, \mu(x))\varphi_2(\mu(x)) - \\
 &- \int_0^h [B_1(x, \mu(x); \eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x, \mu(x); \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta - \\
 &- \int_0^x d\xi \int_0^{\mu(x)} \mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta.
 \end{aligned}$$

Осуществляя интегрирование по частям в (14), учитывая свойства функции $\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)$ и условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0), v_1(0) = \varphi_1'(0), v_1'(0) = \varphi_2'(0),$$

получим соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области

D_1 :

$$\begin{aligned}
 D_{1\xi}(x, \mu(x); x)\tau(x) - \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0)v_1(x) &= \int_0^x H_1(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + \\
 + \int_0^x H_2(x, \xi)v_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 H_1(x, \xi) &= D_{1\xi\xi}(x, \mu(x); \xi) - E_{1\xi}(x, \mu(x); \xi) + F_1(x, \mu(x); \xi), \\
 H_2(x, \xi) &= -\mathcal{G}_{1\xi\xi}(x, \mu(x); \xi, 0) + a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); \xi, 0) + \\
 &+ [a_{2\xi}(\xi, 0) - b_3(\xi, 0)]\mathcal{G}_1(x, \mu(x); \xi, 0), \\
 \Phi_2(x) &= \Phi_1(x) - [\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); 0, 0) - a_2(0, 0)\mathcal{G}_1(x, \mu(x); 0, 0)]\varphi'_1(0) + \\
 &+ \mathcal{G}_1(x, \mu(x); 0, 0)\varphi'_2(0) + [D_{1\xi}(x, \mu(x); 0) - E_1(x, \mu(x); 0)]\varphi_1(0) - \\
 &- D_1(x, \mu(x); 0)\varphi_2(0).
 \end{aligned}$$

3. Соотношение, принесенное из области D_2 . С учетом постановки задачи 1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\begin{aligned}
 v_2'''(x) + \alpha_1(x, 0)\tau'''(x) + \alpha_2(x, 0)v_2''(x) + \beta_1(x, 0)\tau''(x) + \\
 + \beta_2(x, 0)v_2'(x) + \gamma_1(x, 0)\tau'(x) + \gamma_2(x, 0)v_2(x) + \delta(x, 0)\tau(x) = f_2(x, 0).
 \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по x в пределах от 0 до x , и учитывая условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \chi_1(0), \tau''(0) = \chi_2(0),$$

$$v_2(0) = \frac{\varphi'_1(0) - r(0)}{\rho(0)}, v_2'(0) = \chi'_1(0), v_2''(0) = \chi'_2(0),$$

имеем

$$v_2(x) = g_1(x) - \alpha_1(x, 0)\tau(x) + \int_0^x H_3(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x H_4(x, \xi)v_2(\xi)d\xi,$$

(16)

где

$$\begin{aligned}
 H_3(x, \xi) &= \frac{1}{2}(x - \xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi, 0) - \beta_{1\xi\xi}(\xi, 0) + \gamma_{1\xi}(\xi, 0) - \delta(\xi, 0)] - \\
 &- (x - \xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi, 0) - 2\beta_{1\xi}(\xi, 0) + \gamma_1(\xi, 0)] + 3\alpha_{1\xi}(\xi, 0) - \beta_1(\xi, 0), \\
 H_4(x, \xi) &= -\frac{1}{2}(x - \xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0) - \beta_{2\xi}(\xi, 0) + \gamma_2(\xi, 0)] + \\
 &+ (x - \xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi, 0) - \beta_2(\xi, 0)] - \alpha_2(\xi, 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0, 0) - \beta_{1x}(0, 0)]x^2 - [2\alpha_{1x}(0, 0) - \beta_1(0, 0)]x + \alpha_1(0, 0) \right\} \varphi_1(0) - \\
 &- \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0, 0) - \beta_1(0, 0)]x^2 - \alpha_1(0, 0)x \right\} \chi_1(0) + \frac{1}{2}\alpha_1(0, 0)\chi_2(0)x^2 - \\
 &- \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0, 0) + \beta_2(0, 0)]x^2 - \alpha_2(0, 0)x - 1 \right\} \frac{\varphi'_1(0) - r(0)}{\rho(0)} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2}\alpha_2(0, 0)x^2 + x \right] \chi'_1(0) + \frac{1}{2}\chi'_2(0)x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 f_2(\xi, 0) d\xi.
 \end{aligned}$$

Обращая интегральное уравнение (16) относительно $v_2(x)$, приходим к следующему соотношению

$$v_2(x) = g_2(x) - \alpha_1(x, 0)\tau(x) + \int_0^x H_3^*(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{17}$$

где $H_3^*(x, \xi) = H_3(x, \xi) - \alpha_1(\xi, 0)R_1(x, \xi) + \int_{\xi}^x R_1(x, t)H_3(t, \xi)dt$,

$g_2(x) = g_1(x) + \int_0^x R_1(x, \xi)g_1(\xi)d\xi$, а $R_1(x, \xi)$ - резольвента ядра $H_4(x, \xi)$.

4. Сведение к интегральному уравнению. С учетом (17) из условия сопряжения (11) имеем

$$v_1(x) = g_3(x) - \alpha_1(x, 0)\rho(x)\tau(x) + \int_0^x K_1(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (18)$$

где $K_1(x, \xi) = \rho(x)H_3^*(x, \xi) - \theta(x, \xi)\alpha_1(\xi, 0) + \int_{\xi}^x \theta(x, t)H_3^*(t, \xi)dt$,

$$g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + r(x) + \int_0^x \theta(x, \xi)g_2(\xi)d\xi.$$

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (15) и (18), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = g(x) + \int_0^x K(x, \xi)\tau(\xi)d\xi, \quad (19)$$

где

$$\rho_1(x) = 1 + [\rho(x)\alpha_1(x, 0) - 2a_1(x, 0)]\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0) - \int_0^x b_1(x, t)\mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, t)dt,$$

$$K(x, \xi) = H_1(x, \xi) - \rho(\xi)\alpha_1(\xi, 0)H_2(x, \xi) + \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0)K_1(x, \xi) + \int_{\xi}^x H_2(x, t)K_1(t, \xi)dt,$$

$$g(x) = \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, 0)g_3(x) + \int_0^x H_2(x, \xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0, \ell]: \rho_1(x) \neq 0, \quad (20)$$

то уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\rho(x)\alpha_1(x, 0) - 2a_1(x, 0) \equiv 0$, $b_1(x, y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (20) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1: b_1(x, y) - a_{1y}(x, y) \leq 0, \quad (21)$$

то

$$\forall x \in [0, \ell], \eta \in [0, \mu(x)]: \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, \eta) \leq 0. \quad (22)$$

Пример 1. Пусть $a_1 = a^2 + x^2$ ($a = const \neq 0$), $a_2 \equiv b_j \equiv c_i \equiv d \equiv 0$ ($i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$). Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta) = (\xi - x)(\eta - y) - (a^2 + \xi^2) \int_y^{\eta} \mathcal{G}_1(x, y; \xi, t)dt,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{x - \xi}{a^2 + \xi^2} \{ \exp[(a^2 + \xi^2)(y - \eta)] - 1 \}, \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad 0 \leq \eta \leq y.$$

Отсюда заметим, что

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \ell], \eta \in [0, \mu(x)]: \mathcal{G}_{1\xi}(x, \mu(x); x, \eta) = \\ = -(a^2 + x^2) \{ \exp[(a^2 + x^2)(\mu(x) - \eta)] - 1 \} \leq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (1), для которых выполняется неравенство (22) составляет не пустое множество.

Нетрудно заметить, что если

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1: b_1(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \ell]: \rho(x)\alpha_1(x, 0) - 2a_1(x, 0) \leq 0, \quad (23)$$

то

$$\forall x \in [0, \ell]: \rho_1(x) \geq 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (21) и (23) интегральное уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau(x)$ из уравнения (19), будем знать и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (13).

5. Решение задачи 1 в области D_2 . В области D_2 рассмотрим задачу Гурса (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad u(0, y) = \chi(y), \quad -h_1 \leq x \leq 0, \quad (24)$$

где $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение задачи 3 через функции Римана представим в виде [1]

$$\begin{aligned} u(x, y) = \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; x, 0)\tau(x) + \int_0^x A_2(x, y; \xi)\tau(\xi)d\xi + \\ + \int_0^y [\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta)\chi'_2(\eta) + \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta)\chi_2(\eta) - B_2(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) + \\ + C_2(x, y; \eta)\chi_1(\eta) + D_2(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) + E_2(x, y; \eta)\chi(\eta)]d\eta + \\ + \int_0^x \int_0^y \mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta)f_2(\xi, \eta)d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} A_2(x, y; \xi) &= \mathcal{G}_{2\xi\xi\xi}(x, y; \xi, 0) - \alpha_2(\xi, 0)\mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_2(\xi, 0) - \\ &- 2\alpha_{2\xi}(\xi, 0)]\mathcal{G}_{2\xi}(x, y; \xi, 0) + [\beta_{2\xi}(\xi, 0) - \gamma_2(\xi, 0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0)]\mathcal{G}_2(x, y; \xi, 0), \\ B_2(x, y; \eta) &= \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; 0, \eta) - \alpha_2(0, \eta)\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta), \\ C_2(x, y; \eta) &= \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_{2\xi}(x, y; 0, \eta) + [a_{1\xi}(0, \eta) - \beta_1(0, \eta)]\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta), \\ D_2(x, y; \eta) &= \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; 0, \eta) - \alpha_2(0, \eta)\mathcal{G}_{2\xi}(x, y; 0, \eta) - [\alpha_{2\xi}(0, \eta) - \beta_2(0, \eta)]\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta), \\ E_2(x, y; \eta) &= \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; 0, \eta) + [2\alpha_{1\xi}(0, \eta) - \beta_1(0, \eta)] \times \\ &\times \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; 0, \eta) + [\alpha_{1\xi\xi}(0, \eta) - \beta_{1\xi}(0, \eta) + \gamma_1(0, \eta)]\mathcal{G}_2(x, y; 0, \eta), \end{aligned}$$

а $\mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Теперь, воспользовавшись условием (6) из (25) имеем

$$\rho_2(y) \chi(y) = T(y) + \int_0^y E(y, \eta) \chi(\eta) d\eta, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_2(y) &= D_2(\sigma(y), y; y), \quad E(y, \eta) = E_2(\sigma(y), y, \eta) - E_{2\eta}(\sigma(y), y, \eta) \\ T(y) &= \chi_3(y) - \mathcal{G}_2(\sigma(y), y; \sigma(y), 0) \tau(\sigma(y)) - \int_0^{\sigma(y)} A_2(\sigma(y), y; \xi) \tau(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^y [\mathcal{G}_2(\sigma(y), y; 0, \eta) \chi_2'(y) + \alpha_1(0, \eta) \mathcal{G}_2(\sigma(y), y; 0, \eta) \chi_2(\eta) - B_2(\sigma(y), y; \eta) \chi_1'(\eta) + \\ &+ C_2(\sigma(y), y; \eta) \chi_1(\eta)] d\eta - \int_0^{\sigma(y)} d\xi \int_0^y \mathcal{G}_2(\sigma(y), y; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Если

$$\forall y \in [-h, 0]: \rho_2(y) \neq 0, \quad (27)$$

то уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

Пример 2. Пусть $\alpha_2 = \alpha \neq 0$, $\alpha_2 \equiv \beta_i \equiv \gamma_i \equiv \delta \equiv 0$ ($i = 1, 2$). Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \alpha \int_x^\xi \mathcal{G}_2(x, y; s, \eta) ds,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{x - \xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \{ \exp[\alpha(\xi - x)] - 1 \}, \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad y \leq \eta \leq 0.$$

Отсюда заметим, что

$$\forall y \in [-h, 0]: D_2(\sigma(y), y; y) = 1.$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (4), для которых выполняется неравенство (27) составляет не пустое множество.

Пусть выполняется условие (27). Тогда интегральное уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и, определив, отсюда $\chi(y)$, и подставляя ее в (25), получим представление решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1 в области D_2 .

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9), (21), (23), (27), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (11) и (25) соответственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
2. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
5. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 608 с.



ЗАБЕРЯЮ

Ученый секретарь

ОшМУ

Усарова С.О.