Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК Ошского государственного университета

№3 - 2012
выпуск III

ISBN 9967-03-030-5

ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

Выясним геометрический смысл равенства $\sum_i t_{\alpha i}^i = 0$ (т.е. $Q_{\alpha 0} = 0$).

Псевдофокус [3] F_α^i прямой $(X, \vec{\varepsilon}_\alpha)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_\alpha^i = \vec{X} - \frac{1}{t_{\alpha i}^i}\vec{\varepsilon}_\alpha.$$

На каждой прямой $(X, \vec{\varepsilon}_\alpha)$ имеем по три псевдофокуса: $F_\alpha^1, F_\alpha^2, F_\alpha^3$. Гармоничемкий полюс [4] трех точек F_α^i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим через F_α и он определяется следующим радиус вектором:

$$\vec{F}_\alpha = \vec{X} + \frac{1}{\sum_i t_{\alpha i}^i}\vec{\varepsilon}_\alpha.$$

Следовательно, если $Q_{\alpha 0} = 0$, то гармонический полюс $F_\alpha \in (X, \vec{\varepsilon}_\alpha)$ является бесконечно удалённой точкой расширенного евклидова пространства $\overline{E}_7$. Верно и обратное, т.е. если точка F_α является бесконечно удаленной точкой, то $Q_{\alpha 0} = 0$, т.е. вторая поляра точки X относительно фокусной поверхности графика V_3^* имеет центр в точке X.

Литература

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. – М., 1948. - 365с.
2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. – 1966. – Т.6, №4, - С. 475-491.
3. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. // Вопросы дифференциальной геометрии. Т.1. №374. уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, С. 65-70.
4. Казанова Н.В. О гармоническом полюсе. РЖ мат., 1956, №6, С.104.

УДК 517.956.6

Саадалов Т.Ы., ОшТУ

Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопарабола-гиперболалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу үч бурчтукта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселенин жалгыз чечиминин жашашы далилденген.

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике.

Unequivocal resolvability of boundary value problem for the mixed psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with not local condition of interface in a curvilinear triangle is proved.

1. Постановка задачи. Пусть D означает криволинейный треугольник, ограниченной линиями $A_0A_1 : x = 0, -h_1 \le y \le 0$, $A_1B : x = \sigma(y), -h_1 \le y \le 0$, $BA_0 : y = \mu(x), 0 \le x \le \ell$, а $D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0)$ (Рис. 1). Здесь

$\sigma(y)$ - монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ - монотонно невозрастающая функции. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,..., n; s = 0,1,..., m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} + \\ + b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y), \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x, \mu(x)) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \alpha_1(x,y)u_{xxx} + \alpha_2(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \\ + \beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = f_2(x,y), \tag{4}$$

граничным условиям

$$u_x(0,y) = \chi_1(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_2(y),\ -h_1 \le y \le 0 \tag{5}$$

$$u(\sigma(y), y) = \chi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0 \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u_y(x,+0) = \rho(x)u_y(x,-0) + \int_0^x \theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi + r(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

где $a_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i, f_i, \varphi_i (i = 1,2),\ b_j,\ \chi_j (j = \overline{1,3}),\ d,\ \delta,\ \psi, \mu, \sigma, \rho, \theta, r$ *- заданные функции, причем для них выполняются следующие условия*

$$a_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1),\ a_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1), b_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), \\ b_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), b_3 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \delta \in C(\overline{D}_2), \\ \alpha_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ \gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \tag{8}$$

$$\varphi_1,\varphi_2 \in C^2[0,h],\ \psi,\mu,\rho,r \in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\sigma \in C^1[-h_1,0],$$
$$\theta \in C(\overline{Q}) \cap C^{2+1}(Q),\ Q=\{(x,t): 0<x<\ell,\ 0<t<\ell\},$$
$$\forall x \in [0,\ell]: \rho(x) \neq 0,\ \forall x \in [0,\ell]: 0 \le \mu(x) \le h,\ \mu(0)=h,\ \mu(\ell)=0,$$
$$\forall x \in [-h_1,0]: 0 \le \sigma(y) \le \ell,\ \sigma(-h_1)=0,\ \sigma(0)=\ell,\ h,h_1,\ell>0,$$
$$\varphi_2(0)=\chi_1(0), \psi(\ell)=\chi_3(0),\ \varphi_1(h)=\psi(0). \tag{9}$$

Задача 1 в прямоугольной области при $\rho(x)\equiv 1,\ \theta(x,t)\equiv r(x)\equiv 0$ рассмотрена в [1]. Особенностью данной задачи заключается в том, что краевые условия задаются по всей границе области, поэтому ее можно называть задачей типа задачи Дирихле.

Такие задачи с нелокальными условиями сопряжения могут быть математической моделью процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [2, 3].

Уравнения (1) и (4) в области D в силу условия сопряжения (7) является уравнением смешанного типа [4].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения

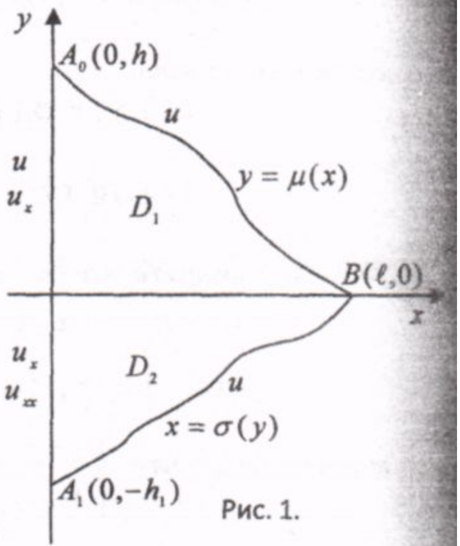

Рис. 1.

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ \ u_y(x,-0)=\nu_2(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{10}$$

где $\tau(x),\ \nu_1(x), \nu_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (7) получим

$$\nu_1(x)=\rho(x)\nu_2(x)+\int_0^x \theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + r(x), \tag{11}$$

Если удастся определить функции $\tau(x),\ \nu_1(x), \nu_2(x)$, то решение задачи 1 сводятся к определению решения уравнений (1) и (4) в областях D_1 и D_2 соответственно.

2. Соотношение, принесенное из области D_1. Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0)=\tau(x), u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0\le x\le \ell\,. \tag{12}$$

Решение этой задачи с помощью функции Римана имеет следующее представление [1]:

$$\begin{gathered} u(x,y)=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int_0^y [B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)- \\ -C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int_0^x [\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+ \\ +a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)- \\ -F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$A_1(x,y)=\vartheta_{1\eta\xi}(x,y;0,y)-a_2(0,y)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y),$$
$$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$C_1(x,y;\eta)=\vartheta_{1\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta)-$$
$$-a_2(0,\eta)\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+$$
$$+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+$$
$$+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1).

Используя условие (3) из (13) получаем интегро-дифференциальное соотношение для функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\int_0^x[\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,\mu(x);\xi)\tau''(\xi)+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);$$
$$\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,\mu(x);\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)\nu_1(\xi)-$$
$$-F_1(x,\mu(x);\xi)\tau(\xi)]d\xi=\Phi_1(x),\tag{14}$$

где

$$\Phi_1(x)=\psi(x)-A_1(x,\mu(x))\varphi_1(\mu(x))+\vartheta_\eta(x,\mu(x);0,\mu(x))\varphi_2(\mu(x))-$$
$$-\int_0^h[B_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_2(\eta)-C_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta-$$
$$-\int_0^x d\xi\int_0^{\mu(x)}\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (14), учитывая свойства функции $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau'(0)=\varphi_2(0),\ \nu_1(0)=\varphi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\varphi_2'(0),$$

получим соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau(x)-\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)\nu_1(x)=\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x),\tag{15}$$

где

$$H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi)-E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi)+F_1(x,\mu(x);\xi),$$
$$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+$$
$$+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$$
$$\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-[\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0)-a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0)+$$
$$+\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0)+[D_{1\xi}(x,\mu(x);0)-E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0)-$$
$$-D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$$

3. Соотношение, принесенное из области D_2. С учетом постановки задачи 1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\nu_2'''(x)+\alpha_1(x,0)\tau'''(x)+\alpha_2(x,0)\nu_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau''(x)+$$
$$+\beta_2(x,0)\nu_2'(x)+\gamma_1(x,0)\tau'(x)+\gamma_2(x,0)\nu_2(x)+\delta(x,0)\tau(x)=f_2(x,0).$$

Интегрируя это уравнение по x в пределах от 0 до x, и учитывая условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\chi_1(0),\ \tau''(0)=\chi_2(0),$$
$$\nu_2(0)=\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)},\ \nu_2'(0)=\chi_1'(0),\ \nu_2''(0)=\chi_2'(0),$$

имеем

$$\nu_2(x)=g_1(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_4(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi, \tag{16}$$

где

$$H_3(x,\xi)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{1\xi\xi}(\xi,0)+\gamma_{1\xi}(\xi,0)-\delta(\xi,0)]-$$
$$-(x-\xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0)-2\beta_{1\xi}(\xi,0)+\gamma_1(\xi,0)]+3\alpha_{1\xi}(\xi,0)-\beta_1(\xi,0),$$
$$H_4(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{2\xi}(\xi,0)+\gamma_2(\xi,0)]+$$
$$+(x-\xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi,0)-\beta_2(\xi,0)]-\alpha_2(\xi,0),$$
$$g_1(x)=\{\frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)]x^2-[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x+\alpha_1(0,0)\}\varphi_1(0)-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x^2-\alpha_1(0,0)x\}\chi_1(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_2(0)x^2-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0,0)+\beta_2(0,0)]x^2-\alpha_2(0,0)x-1\}\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)}+$$
$$+[\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2+x]\chi_1'(0)+\frac{1}{2}\chi_2'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (16) относительно $\nu_2(x)$, приходим к следующему соотношению

$$\nu_2(x)=g_2(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_3^*(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{17}$$

где $H_3^*(x,\xi) = H_3(x,\xi) - \alpha_1(\xi,0)R_1(x,\xi) + \int\limits_\xi^x R_1(x,t)H_3(t,\xi)dt,$

$g_2(x) = g_1(x) + \int\limits_0^x R_1(x,\xi)g_1(\xi)d\xi$, а $R_1(x,\xi)$ - резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

4. Сведение к интегральному уравнению. С учетом (17) из условия сопряжения (11) имеем

$$\nu_1(x) = g_3(x) - \alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x) + \int\limits_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{18}$$

где $K_1(x,\xi) = \rho(x)H_3^*(x,\xi) - \theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0) + \int\limits_\xi^x \theta(x,t)H_3^*(t,\xi)dt,$

$$g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + r(x) + \int\limits_0^x \theta(x,\xi)g_2(\xi)d\xi.$$

Исключив $\nu_1(x)$ из соотношений (15) и (18), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = g(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{19}$$

где

$$\rho_1(x) = 1 + [\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0)]\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0) - \\ - \int\limits_0^{\mu(x)} b_1(x,t)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,t)dt,$$

$$K(x,\xi) = H_1(x,\xi) - \rho(\xi)\alpha_1(\xi,0)H_2(x,\xi) + \\ + \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)K_1(x,\xi) + \int\limits_\xi^x H_2(x,t)K_1(t,\xi)dt,$$

$$g(x) = \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)g_3(x) + \int\limits_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \tag{20}$$

то уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0) \equiv 0,\ b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (20) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \leq 0, \tag{21}$$

то

$$\forall x \in [0,\ell],\ \eta \in [0,\mu(x)]:\ \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) \leq 0. \tag{22}$$

Пример 1. Пусть $a_1 = a^2 + x^2\ (a = const \neq 0)$, $a_2 \equiv b_j \equiv c_i \equiv d \equiv 0\ \ (i = 1,2,\ j = \overline{1,3})$. Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta) = (\xi - x)(\eta - y) - (a^2 + \xi^2)\int\limits_y^\eta \vartheta_1(x,y;\xi,t)dt,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{x-\xi}{a^2+\xi^2}\left\{\exp\left[(a^2+\xi^2)(y-\eta)\right]-1\right\},\ 0\le\xi\le x,\ 0\le\eta\le y.$$

Отсюда заметим, что

$$\forall x\in[0,\ell],\ \eta\in[0,\mu(x)]:\ \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta)=$$
$$=-(a^2+x^2)\left\{\exp\left[(a^2+x^2)(\mu(x)-\eta)\right]-1\right\}\le 0.$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (1), для которых выполняется неравенство (22) составляет не пустое множество.

Нетрудно заметить, что если

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_1:b_1(x,y)\ge 0,\ \forall x\in[0,\ell]:\rho(x)\alpha_1(x,0)-2a_1(x,0)\le 0, \tag{23}$$

то

$$\forall x\in[0,\ell]:\rho_1(x)\ge 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (21) и (23) интегральное уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau(x)$ из уравнения (19), будем знать и $\nu_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (13).

5. Решение задачи 1 в области D_2. В области D_2 рассмотрим задачу Гурса (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5) и

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell,\ u(0,y)=\chi(y),\ -h_1\le x\le 0, \tag{24}$$

где $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение задачи 3 через функции Римана представим в виде [1]

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\&+\int_0^y[\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+\alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2(\eta)-B_2(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)+\\&+C_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)+D_2(x,y;\eta)\chi'(\eta)+E_2(x,y;\eta)\chi(\eta)]d\eta+\\&+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi,\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}&A_2(x,y;\xi)=\vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\alpha_2(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[\beta_2(\xi,0)-\\&-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,0)+[\beta_{2\xi}(\xi,0)-\gamma_2(\xi,0)-\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(x,y;\xi,0),\\&B_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\&C_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)+[a_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\&D_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)-[\alpha_{2\xi}(0,\eta)-\beta_2(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\&E_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)+[2\alpha_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\times\\&\times\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)+[\alpha_{1\xi\xi}(0,\eta)-\beta_{1\xi}(0,\eta)+\gamma_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),\end{aligned}$$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Теперь, воспользовавшись условием (6) из (25) имеем

$$\rho_2(y)\,\chi(y) = T(y) + \int_0^y E(y,\eta)\,\chi(\eta)d\eta, \tag{26}$$

где

$$\rho_2(y) = D_2(\sigma(y), y; y),\ E(y,\eta) = E_2(\sigma(y), y, \eta) - E_{2\eta}(\sigma(y), y, \eta)$$

$$T(y) = \chi_3(y) - \vartheta_2(\sigma(y), y; \sigma(y), 0)\tau(\sigma(y)) - \int_0^{\sigma(y)} A_2(\sigma(y), y; \xi)\tau(\xi)d\xi -$$

$$- \int_0^y [\vartheta_2(\sigma(y), y; 0, \eta)\chi_2'(y) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(\sigma(y), y; 0, \eta)\chi_2(\eta) - B_2(\sigma(y), y; \eta)\chi_1'(\eta) +$$

$$+ C_2(\sigma(y), y; \eta)\chi_1(\eta)]d\eta - \int_0^{\sigma(y)} d\xi \int_0^y \vartheta_2(\sigma(y), y; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta)d\eta.$$

Если

$$\forall y \in [-h_1, 0]:\ \rho_2(y) \neq 0, \tag{27}$$

то уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

Пример 2. Пусть $\alpha_2 = \alpha \neq 0,\ \alpha_2 \equiv \beta_i \equiv \gamma_i \equiv \delta \equiv 0\ (i = 1,2)$. Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\vartheta_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \alpha \int_x^{\xi} \vartheta_2(x, y; s, \eta)ds,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\vartheta_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{x - \xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\{\exp[\alpha(\xi - x)] - 1\},\ 0 \le \xi \le x,\ y \le \eta \le 0.$$

Отсюда заметим, что

$$\forall y \in [-h_1, 0]:\ D_2(\sigma(y), y; y) = 1.$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (4), для которых выполняется неравенство (27) составляет не пустое множество.

Пусть выполняется условие (27). Тогда интегральное уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и, определив, отсюда $\chi(y)$, и подставляя ее в (25), получим представление решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1 в области D_2.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если выполняются условия (8), (9), (21), (23), (27), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (11) и (25) соответственно.*

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.

3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

5. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 608 с.