ISSN 1694-7452

Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК Ошского государственного университета

2016 №1

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

МАЗМУНУ

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

of industrial aluminum alloys in wide temperature and speed ranges, including ranges of super plasticity. It is shown that expressions for physical magnitudes allow explaining the physical nature of the metal flow.

Key words: *dynamic super plasticity, aluminum alloys, specific heat, the blurredphase transitionentropy.*

УДК: 517.956.6

Саадалов Т.Ы., ОшТУ

О задаче сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в криволинейном треугольнике

Төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык жана гиперболалыктеңдемелер үчүн ийри сызыктуу үч бурчтуктагы локалдуу эмес жалгаштыруу маселесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

Ачкыч сөздөр: *жалгаштыруу маселеси, псевдопараболалык жана гиперболалыктеңдемелер, төртүнчү тартиптеги теңдемелер, Вольтеррдин теңдемеси, маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы.*

Доказано существование и единственность решения задачи сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в криволинейном треугольнике с нелокальными условиями сопряжения.

Ключевые слова: *задачи сопряжения, псевдопараболические и гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, уравнение Вольтерра, существование и единственность решения задачи.*

1. Постановка задачи. В криволинейном треугольнике D (рис. 1), ограниченной линиями $x = 0$, $-h_1 \le y \le h$ $(h, h_1 > 0)$, $x = \sigma(y)$, $-h_1 \le y \le 0$, $y = \mu(x)$, $0 \le x \le \ell$. $(\ell > 0)$, $\sigma(-h_1) = 0$, $\sigma(0) = \ell$, $\mu(\ell) = 0$, $\mu(0) = h$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u) = u_{xxyy} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_1 u_x + c_2 u_y + du = f_1(x,y),\ (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \quad (1)$$

$$L_2(u) = u_{xxxy} + \alpha_1 u_{xxy} + \alpha_2 u_{xxy} + \beta_1 u_{xx} + \beta_2 u_{xy} + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_y + \delta u = f_2(x,y),\ (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0). \quad (2)$$

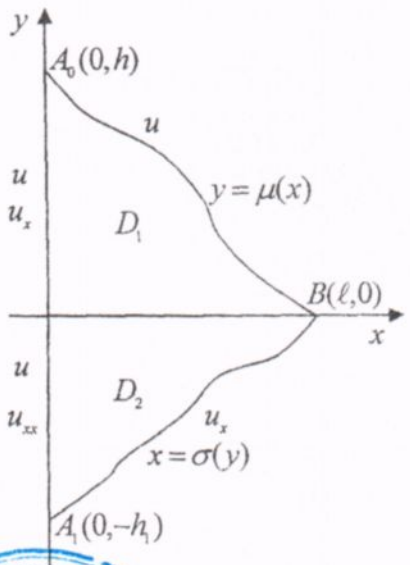

Рис. 1

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,\dots,n,\quad s = 0,1,\dots,m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \bigcap C^{3+1}(D_2)]$, в области D_1 удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$\begin{aligned} &u(0,y) = \varphi_1(y), \\ &u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(x,\mu(x)) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \quad (4)$$

в области D_2 - уравнению (2), краевым условиям

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_2(y),\ -h_1 \le y \le 0, \quad (5)$$

ЗАВЕРЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

$$u_x(\sigma(y),y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0, \qquad (6)$$

и условиям сопряжений

$$u(x_l+0)=u(x_l-0),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x_l+0)=\rho(x)u_y(x-0)+\int_0^x\theta(x,\xi)u_y(\xi-0)d\xi+r(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (7)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \varphi_i$ $(i=1,2)$, b_j, χ_j $(j=\overline{1,3})$ $d,\delta,\psi,\mu,\sigma,\rho,\theta,r$ - заданные функции и для них выполняются следующие условия

$$a_1\in C(D_1)\bigcap C^{2+1}(D_1),\ a_2\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{1+2}(D_1), b_1\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{2+0}(D_1),$$
$$b_2\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{1+1}(D_1), b_3\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{0+2}(D_1),\ c_1\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{1+0}(D_1),$$
$$c_2\in C(\overline{D}_1)\bigcap C^{0+1}(D_1), d\in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{3+0}(D_2),\delta\in C(\overline{D}_2), \qquad (8)$$
$$\alpha_2\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{2+1}(D_2),\ \ \beta_1\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{0+2}(D_2),\beta_1\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{1+1}(D_2),$$
$$\gamma_1\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{1+0}(D_2),\gamma_2\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{0+1}(D_2),$$

$$\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \ \psi,\mu,\rho,r\in C^2[0,\ell],\ \ \chi_1,\chi_2,\chi_3,\sigma\in C^1[-h_1,0],$$
$$\theta\in C(\overline{Q})\bigcap C^{2+1}(Q),\ \ Q=\{(x,t):\ 0<x<\ell, 0<t<\ell\},$$
$$\forall x\in[0,\ell]:\ \ \rho(x)\ne 0, \forall x\in[0,\ell]: 0\le\mu(x)\le h,\ \mu'(x)\le 0, \qquad (9)$$
$$\forall x\in[-h_1,0]: 0\le\sigma(y)\le\ell, \sigma'(y)\ge 0,\ \varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \ \varphi_1(h)=\psi(0).$$

Краевые задачи для уравнений вида (1),(2) в прямоугольных областях рассмотрены в работе [1]. Задача сопряжения с нелокальными условиями могут быть использованы при изучении процессов теплопередачи в составных системах с разными теплофизическими характеристиками [2,3]. Аналогичная задача рассмотрена в работе [4].
Введем следующие.обозначения:

$$u(x_l+0)=u(x_l-0)=\tau(x),\quad 0\le x\le\ell,$$
$$u_y(x_l+0)=\nu_1(x), u_y(x_l-0)=\nu_2(x), 0\le x\le\ell, \qquad (10)$$

где $\tau(x),\nu_1(x),\nu_2(x)$ - пока неизвестные функции. В силу постановки задачи 1 и с учетом обозначения (10) из второго условия (7) будем иметь соотношение

$$\nu_1(x)=\rho(x)\nu_2(x)+\int_0^x\theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+r(x),\ 0\le x\le\ell. \qquad (11)$$

Для решения задачи 1 сначала нужно определить неизвестные функции $\tau(x)$, $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$. Тогда решение задачи 1 определяется как решение следующих вспомогательных задач.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+2}(D_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D_1, краевым условиям (3), (4) и начальномуусловию $u(x,0)=\tau(x)$.

Задача 3. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_2)\cap C^{3+1}(D_2)$, удовлетворяющую уравнению (2) в области D_2, краевым условиям (5),(6) и начальному условию $u(x,0)=\tau(x)$.

2. Методы решения проблемы.

2.1. Соотношение, полученное из области D_2. Устремляя y к нулю и с учетом обозначений (10) из уравнения (2) получим соотношение

$$v_2'''(x)+\alpha_1(x,0)\tau'''(x)+\alpha_2(x,0)v_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau''(x)+\beta_2(x,0)v_2'(x)+$$
$$+\gamma_1(x,0)\tau'(x)+\gamma_2(x,0)v_2(x)+\delta(x,0)\tau(x)=f_2(x,0). \tag{12}$$

Из постановки задачи 1 нетрудно заметить, что для $\tau(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$ выполняются следующие условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau'(0)=\varphi_2(0),\quad \tau''(0)=\chi_2(0),$$
$$v_2(0)=\chi_1'(0),\quad v_2'(0)=r_0,\quad v_2''(0)=\chi_2'(0), \tag{13}$$
$$v_1(0)=\varphi_2'(0),\quad v_1'(0)=\varphi_2'(0),$$

где $r_0=\dfrac{1}{\rho(0)}\left[\varphi_2'(0)-\rho'(0)\chi_1'(0)-\theta(0,0)\chi_1'(0)-r'(0)\right]$.

Интегрируя соотношение (12) по x в пределах 0 до x и учитывая условия согласования (13) получим

$$v_2(x)=q_1(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x N_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x N_4(x,\xi)v_2(\xi)d\xi \tag{14}$$

где

$$N_3(x,\xi)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2\left[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{1\xi\xi}(\xi,0)+\gamma_{1\xi}(\xi,0)-\delta(\xi,0)\right]-$$
$$-(x-\xi)\left[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0)-2\beta_{1\xi}(\xi,0)+\gamma_1(\xi,0)\right]+3\alpha_{1\xi}(\xi,0)-\beta_1(\xi,0),$$
$$N_4(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2\left[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{2\xi}(\xi,0)+\gamma_2(\xi,0)\right]+$$
$$+(x-\xi)\left[2\alpha_{2\xi}(\xi,0)-\beta_2(\xi,0)\right]-\alpha_2(\xi,0),$$
$$q_1(x)=\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)\right]x^2-\left[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)\right]x+\alpha_1(0,0)\right\}\varphi_1(0)-$$
$$-\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)\right]x^2-\alpha_1(0,0)x\right\}\varphi_2(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_2(0)x^2-$$
$$-\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_{2x}(0,0)+\beta_2(0,0)\right]x^2-\alpha_2(0,0)x-1\right\}\chi_1'(0)+\left[\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2+x\right]r_0+$$
$$+\frac{1}{2}\chi_2'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая уравнение (14), относительно $v_2(x)$, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода будем иметь

$$v_2(x)=q_2(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x\widetilde{N}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{N}(x,\xi)=N_3(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)\Gamma_1(x,\xi)+\int_\xi^x\Gamma_1(x,t)N_3(t,\xi)dt,$$

$$q_2(x)=q_1(x)+\int_0^x\Gamma_1(x,\xi)q_1(\xi)d\xi,$$

$\Gamma_1(x,\xi)$ - резольвента ядра $N_4(x,\xi)$.

Подставляя значение $v_2(x)$ из (15) в (11) получим

$$v_1(x)=q_3(x)-\alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x)+\int_0^x N(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (16)$$

где

$$N(x,\xi)=\rho(x)\tilde{N}(x,\xi)-\theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0)+\int_\xi^x \theta(x,t)\tilde{N}(t,\xi)dt,$$

$$q_3(x)=r(x)+\rho(x)q_2(x)+\int_0^x \theta(x,\xi)q_2(\xi)d\xi.$$

2.2. Соотношение, полученное из области D_1. Сначала будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=v(x),\ 0\le x\le \ell$ и условиям (3). Решение этой задачи через функции Римана $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\\
&+\int_0^y\left[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)\right]d\eta+\\
&+\int_0^x[\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1'(\xi)-\\
&-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1(\xi)-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\\
&+\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta,
\end{aligned} \qquad (17)$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ – заданные функции, выражающиеся через коэффициенты уравнения (1)и функции Римана.

Используя условие (4) из (17) будем иметь соотношение

$$\begin{aligned}
D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau(x)&=\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)v_1(x)+\\
&+\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_2(x,\xi)v_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x),
\end{aligned} \qquad (18)$$

где

$$H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi)-E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi)+F_1(x,\mu(x);\xi),$$

$$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+$$
$$+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$$

$$\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-[\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0)-a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0)+$$
$$+\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0)+[D_{1\xi}(x,\mu(x);0)-E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0)-$$
$$-D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$$

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $v_1(x)$ из (16) и (18) придем к интегральному уравнению относительно $\tau(x)$:

$$k(x)\tau(x)=q(x)+\int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (19)$$

где

$$k(x)=D_{1\xi}(x,\mu(x);x)+\alpha_1(x,0)\rho(x)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0),$$

$$K_1(x,\xi)=H_1(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)\rho(\xi)H_2(x,\xi)+\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)+\int_\xi^x H_2(x,t)N(t,\xi)dt.$$

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ k(x)\neq 0, \tag{20}$$

то уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, допускающее единственное решение.

4. Решение задачи 3. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^{3+1}(D_2)$ удовлетворяющее уравнению (2) в области D_2, условию (5) и условиям $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,\ u_x(0,y)=\chi(y),\ -h_1\le y\le 0$. Здесь $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение данной вспомогательной задачи представим через функции Римана $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ в виде

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\&+\int_0^y[\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+\alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2(\eta)-B_2(x,y;\eta)\chi'(\eta)+\\&+C_2(x,y;\eta)\chi(\eta)+D_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)+E_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta+\\&+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta,\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$A_2(x,y;\xi)=\vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\alpha_2(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)+$$
$$+[\beta_2(\xi,0)-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,0)+$$
$$+[\beta_{2\xi}(\xi,0)-\gamma_2(\xi,0)-\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(x,y;\xi,0),$$
$$B_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$
$$C_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)+[\alpha_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$
$$D_2(x,y;\eta)=\upsilon_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\upsilon_{2\xi}(x,y;0,\eta)-$$
$$-[\alpha_{2\xi}(0,\eta)-\beta_2(0,\eta)]\upsilon_2(x,y;0,\eta),$$
$$E_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)+[2\alpha_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,\eta)+$$
$$+[\alpha_{1\xi\xi\xi}(0,\eta)-\beta_{1\xi}(0,\eta)+\gamma_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$

а $\vartheta_2(x,y,\xi,\eta)$ - функции Римана для уравнения (2).

Вычислив производную $u_x(x,y)$ из формулы (21) и используя условие (6) получим уравнение

$$\int_0^y B_{2x}(\sigma(y),y;\eta)\chi'(\eta)d\eta=T(y)+\int_0^y C_{2x}(\sigma(y),y;\eta)\chi(\eta)d\eta,$$

где

$$T(y)=-\chi_3(y)+\vartheta_{2\xi\xi_x}(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau(\sigma(y))+\vartheta_{2\xi\xi}(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau'(\sigma(y))+$$

$$+A_2(\sigma(y),y;\sigma(y))\tau(\sigma(y))+\int_0^{\sigma(y)}A_{2x}(\sigma(y),y;\xi)\tau(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^y[\vartheta_{2x}(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2x}(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2(\eta)+$$

$$+D_{2x}(\sigma(y),y;\eta)\chi_1(\eta)+E_{2x}(\sigma(y),y;\eta)\chi_1(\eta)+$$

$$+\int_y^{\sigma(y)}d\xi\int_0^y\vartheta_{2x}(\sigma(y),y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям будем иметь

$$B_{2x}(\sigma(y),y;y)\chi(y)=T_1(y)+\int_0^y K_2(y,\eta)\chi(\eta)d\eta, \qquad (22)$$

где

$T_1(y)=T(y)+B_{2x}(\sigma(y),y;0)\varphi_2(0),$

$K_2(y,\eta)=C_{2x}(\sigma(y),y;\eta)-B_{2x\eta}(\sigma(y),y;\eta).$

Если

$$\forall y\in[-h_1,0]: \quad B_{2x}(\sigma(y),y;y)\neq 0 \qquad (23)$$

то уравнение (22) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Определив $\chi(y)$ из (22) получим решение задачи 1 в области D_2.

Таким образом, доказано

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9),(20) и (23), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент. Фан. 2000. – С.144.
2. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальном контактом//Вестник СамГТУ. Вып. 42. Сер. ФМН. 2006. – С.11-34.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М. Высш.шк., 1995. – С.301.
4. Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике// Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Вып. III. №3. 2012.– С. 114-121.

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ Усарова С.О.

T.Y. Saadalov, OshTU
saadtol_68@mail.ru

About coupling problems of pseudoparabolic and hyperbolic quaternaryequations in curvilinear triangle

The existence and uniqueness of the coupling problem solution for pseudoparabolic and hyperbolic quaternary equations in the curvilinear triangle with nonlocal transmission conditions.

Key words: *coupling problems, pseudoparabolic and hyperbolic equations, quaternary equations, Volterra equation, existence and uniqueness of the coupling problem solution.*