

«УТВЕРЖДАЮ»

Председатель диссертационного совета

К 01.15.504 при ОшГУ и ИПР ЮО

НАН КР д.ф.-м.н., профессор

Г. Матиева

«23» мая 2016 года

ПРОТОКОЛ № 5

расширенного заседания диссертационного совета К 01.15.504 при Ошском государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения Национальной академии наук Кыргызской Республики

от 23 мая 2016 года

ПРИСУТСТВОВАЛИ: Члены диссертационного совета К 01.15.504: профессор Матиева Г. (председатель), доктора физ.-мат. наук Сопуев А., Алыбаев К.С., Арапов Б., Ташполотов Ы., Арзиев Ж., кандидаты физ.-мат. наук Абдувалиев А.О., Бекешов Т.О. (учёный секретарь), Папиева Т.М.

Приглашенные: доктора физ.-мат. наук Алымкулов К., Аширбаева А.Ж. (ОшТУ); кандидаты физ.-мат. наук Асылбеков Т.Д., Осмоналиев А.Б., Жээнтаева Ж. (КУУ), Чамашев М.К., Артыкова Ж.А., Сатаров А.Э., Сопуев У.А., Зулпукаров Ж.А. (ОшТУ), Тойгонбаева А.К., преподаватели Аркабаев Н., Молдоярлов У., Токторбаев А., Беделова Н.С., Эркебаев У.З., Азимов Б.А.

Председатель заседания: д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.

Ученый секретарь: к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ПОВЕСТКА ДНЯ:

2. Предварительная защита диссертации соискателя Эркебаева Улукбека Зайирбековича на тему: «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений» и утверждение заключения экспертной комиссии диссертационного совета на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель: д.ф.-м.н., доцент Турсунов Д.А.

СЛУШАЛИ:

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: – Уважаемые члены диссертационного совета, продолжаем наше заседание. Следующая диссертация тоже по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, на данный момент присутствует девять членов диссертационного совета, из них по профилю защищаемой диссертации 2

доктора наук: Адахимжан Сопуевич, Курманбек Сарманович. Кворум есть. Каково ваше мнение на счет открытия сегодняшнего нашего заседания?

ГОЛОСА: – Поставить на голосование.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: – Прошу проголосовать. Против? Воздержавшихся? – Нет. Спасибо.

Второй вопрос повестки дня: предзащита кандидатской диссертации Эркебаева Улукбека Зайирбековича на тему: «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Турсунов Д.А.

Для ознакомления членов диссертационного совета с аттестационным делом диссертанта Эркебаева У.З., слово предоставляется ученому секретарю Турдумамат Орозмаматовичу Бекешову.

БЕКЕШОВ Т.О.: – Уважаемый председатель, а также уважаемые члены диссертационного совета, уважаемые гости! Разрешите ознакомить Вас с аттестационным делом Эркебаева Улукбека Зайирбековича. В аттестационном деле имеется: заявление на имя председателя диссертационного совета о принятии диссертации к защите; личный листок по учету кадров; заверенная копия диплома об окончании Ошского государственного университета в 2011 году; удостоверение по сдаче кандидатских экзаменов; характеристика по месту работы; выписка из протокола № 5а расширенного заседания кафедры Информатики факультета математики и информационных технологий Ошского государственного университета; заключение экспертной комиссии диссертационного совета; отзыв научного руководителя Д.А. Турсунова; выписка из протокола № 6 заседания Ученого Совета Ошского государственного университета от 16 марта 2012 года об утверждении темы кандидатской диссертации и научного руководителя; список научных и методических работ.

– Эркебаев Улукбек Зайирбекович с 2011 года работает в Ошском государственном университете, с 2012 г. по 2015 г. учился на заочном отделении аспирантуры ОшГУ, в 2011-2012 годы работал инженером электронщиком компьютерного центра при факультете Математики и информационных технологий, с 2012 года работает инженером программистом компьютерного центра и преподавателем кафедры Информатики факультета Математики и информационных технологий.

Проводит лекционные и практические занятия по дисциплинам: «Компьютерные сети интернет и мультимедиа технологии», «Компьютерная сеть», «База данных» и др. Занятия проводит на достаточно высоком научно-методическом и теоретическом уровне.

За время работы Эркебаев У.З. показал себя с хорошей стороны. Постоянно работает над повышением своей профессиональной и деловой

квалификации. Знакомится с новыми научными результатами в области математики и информационных технологий. Руководит написанием курсовых и дипломных работ. Участвовал в семинарах программы «Профессиональная компетенция педагога» и «Компетенции образования». Активно участвует в общественно-спортивных мероприятиях факультета. Также он сказал, что Эркебаев У.З. имеет 1 монографию объемом 7 п.л., 17 научных статей и 2 тезиса докладов. Статьи опубликованы в научных рецензируемых математических журналах: Уфимский математический журнал (статья опубликована на двух языках на русском и на английском, которые включены в базы РИНЦ и Scopus), Вестник Томского государственного университета. Математика и механика (2 статьи, РИНЦ), Вестник Удмурдского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки (РИНЦ), Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. (г. Воронеж, РИНЦ), Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика», набрал 280 баллов по публикациям, что дает право на предзащиту.

За годы учебы в аспирантуре и работы в университете Эркебаев У.З. работал над научно-исследовательской темой «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений».

В итоге получены следующие результаты:

1. Доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца.
2. Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца.
3. Обоснование достоверности асимптотических разложений решений, т.е. оценки остаточных функций, получено с помощью принципа максимума и методом дифференциальных неравенств.

Кроме того, Эркебаев У.З. активно участвует во всех мероприятиях факультета и университета, за что не раз была отмечена грамотами.

Эркебаев Улукбек скромен в быту, пользуется большим авторитетом среди студентов и преподавателей факультета и университета. По полученным результатам исследования оформил кандидатскую диссертацию.

Характеристика дана для представления в Диссертационный Совет К 01.15.504 по защите кандидатских диссертаций по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Подписывает проректор по науке ОшГУ, профессор Жумабаева Т.Т. и председатель профкома ОшГУ Аккулов А.У.

– Если есть вопросы по аттестационному делу?

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: – По делу диссертанта имеются вопросы? Нет вопросов? – Пожалуйста, тогда слово предоставляется Эркебаеву У.З. для изложения основного содержания диссертации. 15 минут в вашем распоряжении, пожалуйста.

ЭРКЕБАЕВ У.З.: – Здравствуйте уважаемая председатель, а также уважаемые члены диссертационного совета! (Излагает основное содержание диссертационной работы с использованием слайдов в среде Microsoft Power Point с помощью диапроектора).

– Разрешите представить доклад кандидатской диссертации на тему: «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений». Научным руководителем является д.ф.-м.н., доцент Турсунов Д.А.

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения (обыкновенные или в частных производных) с малым параметром при старшей производной называют сингулярно возмущенными. Во многих областях науки сложные задачи описываются сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями. Исследования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений составляют самостоятельную область математики, представляющую теоретический и прикладной интерес. В ней решаются серьезные вычислительные задачи, имеющие важные практические приложения.

Исследование сингулярно возмущенных задач сформировалось на основе фундаментальных работ А.Н.Тихонова и развивается в работах его учеников и многих других ученых. Вместе с тем, проблема построения полных асимптотических разложений решений для некоторых классов сингулярно возмущенных задач до сих пор остается актуальной. Например, бисингулярные задачи¹, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая – с не гладкостью членов асимптотики внешнего разложения решения, т.е. «вырожденная» (предельная) задача, соответствующая исходной рассматриваемой сингулярной задаче, сама обладает сингулярностью.

Случаи, в которых бисингулярные задачи имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров задача определить поведение решения в пограничных (внутренних) слоях, при достаточно малых значениях параметра, – весьма трудоемкая задача. Важным инструментом при исследовании поведений решений бисингулярных задач являются асимптотические методы. В связи с этим в настоящее время интенсивно разрабатываются различные асимптотические методы.

В данной работе полные, равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле для кольца строятся обобщенным методом пограничных функций профессора К. Алымкулова, так как невозможно напрямую применять классический метод пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева, в связи с нарушением условия А.Н. Тихонова. Для оценки остаточных членов асимптотических рядов применяются классический принцип максимума и метод дифференциальных неравенств.

¹ Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. – М.: Наука. – 1989.

Ранее задача Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в кольце с сингулярными границами или сингулярными линиями внутри кольца не изучались.

Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидро - аэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы» № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидро- аэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР УН № ОН - 2/14 27.01.2014 г.

Цель диссертационной работы: 1) Развить обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова для построения полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца. 2) Обосновать полученные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца с помощью принципа максимума и метода дифференциальных неравенств.

Научная новизна: 1) Доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца. 2) Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца. 3) Обоснование достоверности асимптотических разложений решений, т.е. оценки остаточных функций, получены с помощью принципа максимума и методом дифференциальных неравенств.

Основные положения, выносимые на защиту

Построение и обоснование равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца, с любой степенью точности, когда решение предельного уравнения имеет сингулярности:

- на границе (линейный, квадратичный и произвольный натурального порядка рост сингулярности на границе);
- одновременно на обеих границах (линейный, линейный и квадратичный, квадратичный рост сингулярности на обеих границах);
- внутри (квадратичный рост и произвольный рост четного натурального порядка сингулярности внутри кольца);
- одновременно на обеих границах и внутри кольца (на границах линейный, а внутри кольца квадратичный рост сингулярности).

Методика исследования. При построении формальных, полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца используются обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова, классический метод пограничных функций и метод малого параметра. Для обоснования формальных асимптотических разложений решений задач Дирихле применяются принцип максимума и метод

дифференциальных неравенств. Также используется метод математической индукции.

Теоретическая и практическая ценность. Задачи, рассмотренные в диссертационной работе представляют теоретический и практический интерес так как по многочисленности и разнообразию приложений задача Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимает исключительное место в математике. К ней непосредственно сводятся: основная задача в гидродинамике – задача обтекания; задачи кручения и изгиба в теории упругости; в физике – определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре и др.

Построение полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач по степеням малого параметра имеет весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях "Актуальные вопросы современных математических и естественных наук" (г. Екатеринбург – 2015), «Перспективы развития фундаментальных наук» (г. Томск – 2015), «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» посвященной 50-летию создания Института математики и механики АН КазССР (г. Алматы – 2015), «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ». Башкирский государственный университет (г. Уфа – 2015), «Роль науки и образования в современных условиях глобализации» (г. Ош – 2015). Обсуждались на научных семинарах математиков Южного региона Кыргызстана под руководством член корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова.

Во **введении** диссертации обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и отмечена научная новизна работы, а также кратко изложено содержание глав.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В § 1.1 дается краткий обзор литературы по теме диссертации. В § 1.2 приводятся общая постановка задачи и основные теоремы. Отмечено, что неоднородные граничные условия $u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi, \varepsilon)$, $u(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi, \varepsilon)$, с помощью преобразования

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = v(\rho, \varphi, \varepsilon) + (\psi_2(\varphi, \varepsilon)(\rho - a) + \psi_1(\varphi, \varepsilon)(b - \rho)) / (b - a)$$

всегда можно привести к однородным $v(a, \varphi, \varepsilon) = 0$, $v(b, \varphi, \varepsilon) = 0$. Поэтому, не нарушая общности, в диссертации изучались задачи Дирихле с однородными граничными условиями. Доказаны теоремы

Теорема 1. Решение задачи Дирихле

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - p(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D, \quad (1)$$

$$u(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad u(b, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

существует, единственно и справедливо оценка $|u(\rho, \varphi, \varepsilon)| \leq M/\varepsilon$, где $(\rho, \varphi) \in (\bar{D})$: $p(\rho, \varphi) \geq 0$, $p \in C^\infty(\bar{D})$, $0 < M = \text{const}$.

Теорема доказана методом дифференциальных неравенств.

Теорема 2. Для решения задачи Дирихле

$$\varepsilon \Delta R(\rho, \varphi, \varepsilon) - p(\rho, \varphi) R(\rho, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon^{s+1} \Phi(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

$$R(a, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon^{s+1} \Phi_1(\varphi, \varepsilon), \quad R(b, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon^{s+1} \Phi_2(\varphi, \varepsilon).$$

справедлива асимптотическая оценка $|R(\rho, \varphi, \varepsilon)| \leq \varepsilon^s M$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$,
где $(\rho, \varphi) \in \bar{D} : p(\rho, \varphi) \geq 0$, $p \in C^\infty(\bar{D})$, $\Phi(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(1)$, $\Phi_{1,2}(\varphi, \varepsilon) = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$.

Теорема доказана двумя способами: методом дифференциальных неравенств и принципом максимума.

Сформулирована общая постановка задачи: требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказаны леммы

Лемма 1. Пусть $F(\tau)\Phi(\varphi) \in C^\infty(\bar{D}_\tau)$, $q(\varphi) > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n q(\varphi) z(\tau, \varphi) = F(\tau)\Phi(\varphi), \quad (\tau, \varphi) \in D_\tau, \quad z(0, \varphi) = z^0(\varphi),$$

имеет единственное решение $z(\tau, \varphi) \in C^\infty(\bar{D}_\tau)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ , когда $\tau \rightarrow +\infty$.

Лемма 2. Пусть $0 < q \in C^\infty[0, 2\pi]$ и функции $p_j \in C^\infty(\bar{D}_\tau)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\tau, \varphi) = \tau^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{j, (n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j=0, 1, \dots, n+1, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Тогда в области $\bar{D}_\tau$ существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_j(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n q(\varphi) \tilde{w}_j(\tau, \varphi) = p_j(\tau, \varphi), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{w}_j(\tau, \varphi) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{j, (n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j=0, 1, \dots, n+1, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

При этом ряды (4) многократно почленно дифференцируемы, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений (3).

Вторая глава посвящена построению асимптотического разложения решения задачи (1), (2) с одной сингулярной границей. В § 2.1 сформулирована постановка задачи — требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

$$U_1. p(\rho, \varphi) = (\rho - a)^n \alpha(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D} : \alpha(\rho, \varphi) > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f(a, \varphi, 0) \neq 0.$$

ФАРР задачи (1), (2) с условием U_1 ищется в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta, \varphi, \lambda), \quad (5)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$ — регулярное внешнее решение,

$W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-n}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$ — погранслоная функция в окрестности

внутренней границы кольца, $\tau=(\rho-a)/\mu$, $\varepsilon=\mu^{n+2}$, $Q(\eta, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k q_k(\eta, \varphi) -$
 классическая пограничная функция в окрестности внешней границы кольца,
 $\eta=(b-\rho)/\lambda$, $\varepsilon=\lambda^2$.

Из условия (2) следует: $W(0, \varphi, \mu) = -V(a, \varphi, \mu^{n+2})$, $Q(0, \varphi, \lambda) = \psi(\varphi, \lambda^2)$,
 где $\psi(\varphi, \lambda^2) = -V(b, \varphi, \lambda^2) - W((b-a)/\mu, \varphi, \mu)$, $\psi(\varphi, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(\varphi)$.

После подстановки соотношение (5) в уравнение (1), получиться

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho-a)^n \alpha(\rho, \varphi) V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D,$$

$$\mu^n \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{a + \tau \mu} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(a + \tau \mu)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \tau^n \alpha(a + \tau \mu, \varphi) W \right) =$$

$$= h(a + \tau \mu, \varphi, \mu^{n+2}), (\tau, \varphi) \in D_\tau,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{b - \eta \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{(b - \eta \lambda)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = (c - \eta \lambda)^n \alpha(b - \eta \lambda, \varphi) Q, (\eta, \varphi) \in D_\eta,$$

где $c=b-a$, $W=W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q=Q(\eta, \varphi, \lambda)$.

По идее метода, введен вспомогательный асимптотический ряд
 $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi)$. Этот асимптотический ряд конкретизируется при
 построении регулярного внешнего решения и погранслоного решения в
 окрестности $\rho=a$. С помощью асимптотического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j}(\varphi) (\rho-a)^j, \text{ где } h_{k,j}(\varphi) = - \sum_{s=1}^{(n+2)k+n} \alpha_{s+j}(\varphi) w_{(n+2)k-s,s}(\varphi),$$

нарастающие сингулярности внешнего решения $V(\rho, \varphi, \varepsilon)$ вносятся в внутреннее
 решение $W(\tau, \varphi, \mu)$.

Классическое погранслоное решение $Q(\eta, \varphi, \lambda)$ устраняет невязку на
 внешней границы кольца, т.е. при $\rho=b$ и экспоненциально убывает вне
 пограничного слоя, а погранслоное решение $W(\tau, \varphi, \mu)$ устраняет невязку на
 внутренней границы кольца, т.е. при $\rho=a$ и степенным ростом убывает вне
 пограничного слоя.

В § 2.2 доказывается

Теорема 3. Пусть выполняется условие U_1 и $n=1$. Тогда для решения
 задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k} q_k(\eta, \varphi) + \sum_{k=-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi), \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in E_1^\tau$, $q_k \in C^\infty(D_\eta)$, $\tau=(\rho-a)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta, \varphi) = O(1/e^\eta)$
 при $\eta \rightarrow +\infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Приведен пример 1, когда $n=1$, $\alpha(\rho, \varphi)=1$, $f(\rho, \varphi, \varepsilon)=1+\rho\varphi$, $a=1$, $b=2$.

Доказано, что для решения примера 1 справедливо разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = -\varphi + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k} q_k \left(\frac{2-\rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \varphi \right) + \sum_{k=-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\varepsilon^k} w_k \left(\frac{\rho-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, \varphi \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В § 2.3 методика, разработанная в § 2.2, обобщается на случай $n=2$. Доказана

Теорема 4. Пусть выполняется условие U_1 и $n=2$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k} q_k(\eta, \varphi) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in E_2^\tau$, $q_k \in C^\infty(D_\eta)$, $\tau = (\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta = (b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta, \varphi) = O(1/e^\eta)$, $\eta \rightarrow +\infty$.

Приведен *пример 2*. Пусть в задаче Дирихле (1), (2) $n=2$, $\alpha(\rho, \varphi)=1$, $f(\rho, \varphi, \varepsilon)=1+\rho \cos(\varphi)$, $a=1$, $b=2$. Тогда $h_0(\rho, \varphi)=1+\cos(\varphi)+(\rho-1)\cos(\varphi)$, $h_k(\rho, \varphi) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$, $v_k(\rho, \varphi) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказано, что для решения примера 2 справедливо разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k} q_k(\eta, \varphi) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В § 2.4 обобщаются результаты § 2.2 и § 2.3 для $\forall n \in \mathbb{N}$. Доказана

Теорема 5. Пусть выполняется условие U_1 . Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение (5), где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in E_n^\tau$, $q_k \in C^\infty(D_\eta)$, $\tau = (\rho-a)/\sqrt[n+2]{\varepsilon}$, $\eta = (b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta, \varphi) = O(1/e^\eta)$ при $\eta \rightarrow +\infty$.

Приведен *пример 3*. Пусть в задаче (1), (2) $n=3$, $\alpha(\rho, \varphi)=1$, $f(\rho, \varphi, \varepsilon)=1+\rho^3$, $a=1$, $b=2$. Тогда $h_0(\rho, \varphi)=2+3(\rho-1)+3(\rho-1)^2$, $v_0(\rho, \varphi)=1$, $h_k(\rho, \varphi) \equiv 0$, $v_k(\rho, \varphi) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. Доказано, что для решения примера 3 справедливо разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k} q_k(\eta, \varphi) + \sum_{k=-3}^{+\infty} \sqrt[5]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Замечание. Аналогично исследуется тот случай, когда внешние решения имеют нарастающие особенности на внешней границе кольца, т.е. задача Дирихле для уравнения

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - (b-\rho)^n \alpha(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D.$$

Глава 3 посвящена построению асимптотического разложения решения задачи Дирихле (1), (2) с внутренними и внешними сингулярными границами. В § 3.1 сформулирована постановка задачи – требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

$$U_2. p(\rho, \varphi) = (b-\rho)^m (\rho-a)^n, \quad n, m \in \mathbb{N}, f(a, \varphi, 0) \neq 0, f(b, \varphi, 0) \neq 0.$$

В § 3.2 исследуется случай $n=1$, $m=1$.

ФАРР задачи (1), (2) с условием U_2 ищется в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta, \varphi, \mu), \quad (6)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, $W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $\tau = (b-\rho)/\mu$, $\varepsilon = \mu^3$,

$$Q(\eta, \varphi, \mu) = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k q_k(\eta, \varphi), \quad \eta = (\rho-a)/\mu.$$

Из условий (2) следует, что $W(0, \varphi, \mu) = -V(b, \varphi, \mu^3)$, $Q(0, \varphi, \mu) = -V(a, \varphi, \mu^3)$.
Подставляя соотношение (6) в уравнение (1) при $n=m=1$, получаются

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - (b-\rho)(\rho-a)V(\rho, \varphi, \varepsilon) &= f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \frac{\mu}{b-\tau\mu} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(b-\tau\mu)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \tau(c-\tau\mu)W \right) &= \\ &= h_1(b-\tau\mu, \varphi, \mu^3), \quad (\tau, \varphi) \in D_\tau, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + \frac{\mu}{a+\eta\mu} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\mu^2}{(a+\eta\mu)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} - \eta(c-\eta\mu)Q \right) &= \\ &= h_2(a+\eta\mu, \varphi, \mu^3), \quad (\eta, \varphi) \in D_\eta, \end{aligned}$$

где $c=b-a$, $W=W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q=Q(\eta, \varphi, \mu)$.

Здесь тоже введены вспомогательные асимптотические ряды

$$h(\rho, \varphi, \varepsilon) = h_1(\rho, \varphi, \varepsilon) + h_2(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad h_j(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_{j,k}(\rho, \varphi).$$

Они определяются при построении регулярного внешнего решения $V(\rho, \varphi, \varepsilon)$ и граничных функций $W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q=Q(\eta, \varphi, \mu)$ так чтобы выполнялись условия:

$$v_k \in C^\infty(\overline{D}), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} w_{k-1}(\tau, \varphi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} q_{k-1}(\eta, \varphi) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \text{ Доказана}$$

Теорема 6. Пусть выполняется условие U_2 и $n=m=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение (6), где $v_k \in C^\infty(\overline{D})$, $w_k \in E_1^\tau$, $q_k \in E_1^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[3]{\varepsilon}$.

Приведен пример 4. Пусть $m=n=1$, $b=2$, $a=1$, $f(\rho, \varphi, \varepsilon)=1+\rho \cos(\varphi)$. Тогда

$$v_0(\rho, \varphi) = -(1+\rho \cos(\varphi) - h_0(\rho, \varphi))/(2-\rho)(\rho-1),$$

$$h_0(\rho, \varphi) = (\rho-1)(1+2 \cos(\varphi)) + (2-\rho)(1+\cos(\varphi)) = 1+\rho \cos(\varphi).$$

Поэтому $v_0(\rho, \varphi)=0$, и $v_k(\rho, \varphi)=0$, $h_k(\rho, \varphi)=0$, $k \in \mathbb{N}$. Доказано, что для решения примера 4 справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \sqrt[3]{\varepsilon^k} \left(w_k \left(\frac{2-\rho}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, \varphi \right) + q_k \left(\frac{\rho-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, \varphi \right) \right).$$

В § 3.3 и § 3.4 исследуются случаи $n=2$, $m=1$ и $n=2$, $m=2$. Доказаны

Теорема 7. Пусть выполняется условие U_2 и $n=2$, $m=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=-1}^{\infty} \sqrt[3]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi) + \sum_{k=-2}^{\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} q_k(\eta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $v_k \in C^\infty(\overline{D})$, $w_k \in E_1^\tau$, $q_k \in E_2^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Теорема 8. Пусть выполняется условие U_2 и $n=2$, $m=2$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=-2}^{\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} (w_k(\tau, \varphi) + q_k(\eta, \varphi)), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in E_2^\tau$, $q_k \in E_2^\eta$, $\tau = (b-\rho)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta = (\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Замечание. При $\forall n, m \in \mathbb{N}$ проведя аналогичное исследование, строится асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=-m}^{\infty} \varepsilon^{m+2k} w_k(\tau, \varphi) + \sum_{k=-n}^{\infty} \varepsilon^{n+2k} q_k(\eta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in E_m^\tau$, $q_k \in E_n^\eta$, $\tau = (b-\rho)/\varepsilon^{m+2k}$, $\eta = (\rho-a)/\varepsilon^{n+2k}$.

В главе 4 исследуется асимптотическое поведение решения задачи Дирихле (1), (2) с внутренними и граничными сингулярными линиями. В § 4.1 сформулирована постановка задачи – требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

U_3 . $p(\rho, \varphi) = (\rho-c)^{2n} \alpha(\rho, \varphi)$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$: $\alpha(\rho, \varphi) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f(c, \varphi, 0) \neq 0$, $c \in (a, b)$.

U_4 . $p(\rho, \varphi) = (b-\rho)(\rho-c)^2(\rho-a)$, $f(a, \varphi, 0) \neq 0$, $f(b, \varphi, 0) \neq 0$, $f(c, \varphi, 0) \neq 0$, $c \in (a, b)$.

ФАРР задачи (1), (2) с условием U_3 ищется в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + \chi(\rho)W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta_1, \varphi, \lambda) + \tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda), \quad (7)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, $W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-2n}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $\tau = (\rho-c)/\mu$, $\varepsilon = \mu^{2n+2}$,

$$Q(\eta_1, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k q_k(\eta_1, \varphi), \quad \tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \tilde{q}_k(\eta_2, \varphi), \quad \varepsilon = \lambda^2, \quad \eta_1 = (b-\rho)/\lambda, \quad \eta_2 = (\rho-a)/\lambda,$$

$\chi(\rho)$ – функция сглаживания, $\chi(\rho) \in [a, b]$, $\chi \in C^\infty[a, b]$, $\chi(\rho) = 1$ при $|\rho-c| \leq \delta/3$, $\chi(\rho) = 0$ при $2\delta/3 \leq |\rho-c|$, $0 < \delta$ – малое число, независимое от малого параметра ε .

Подставляя (7) в уравнение (1) получим

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{V}(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho-c)^{2n} \alpha(\rho, \varphi) V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - \chi(\rho) h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

$$\begin{aligned} & \mu^{2n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{c + \tau \mu} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(c + \tau \mu)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - (\mu \tau)^{2n} \alpha(c + \tau \mu, \varphi) W = \\ & = h(c + \tau \mu, \varphi, \mu^{2n+2}), \quad (\tau, \varphi) \in D_0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta_1^2} - \frac{\lambda}{b - \eta_1 \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \eta_1} + \frac{\lambda^2}{(b - \eta_1 \lambda)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = (b_1 + \eta_1 \lambda)^{2n} \alpha(b - \eta_1 \lambda, \varphi) Q, \quad (\eta_1, \varphi) \in D_{\eta_1},$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \eta_2^2} + \frac{\lambda}{a + \eta_2 \lambda} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \eta_2} + \frac{\lambda^2}{(a + \eta_2 \lambda)^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \varphi^2} = (a_1 + \eta_2 \lambda)^{2n} \alpha(a + \eta_2 \lambda, \varphi) \tilde{Q}, \quad (\eta_2, \varphi) \in D_{\eta_2},$$

где $D_0 = \{(\tau, \varphi): |\tau| < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, $W = W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q = Q(\eta_1, \varphi, \lambda)$, $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda)$, $b_1 = c - b$,

$$\tilde{V}(\rho, \varphi, \varepsilon) = \chi''(\rho)W(\rho, \varphi, \varepsilon) + \chi'(\rho) \left(2 \frac{\partial W(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\partial \rho} + \frac{W(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\rho} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(\rho, \varphi), \quad a_1 = a - c.$$

Как всегда, по идее метода введен вспомогательный асимптотический ряд

$$h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi), \quad h_k(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{2n-1} g_{k,j}(\varphi) (\rho - c)^j + \sum_{j=2n}^{\infty} h_{k,j}(\varphi) (\rho - c)^j, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где $g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)$, $g_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(c, \varphi)}{j! \partial \rho^j}$, $h_{k,j}(\varphi)$ – пока неизвестные функции, они конкретизируются при построении ряда

$$W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-2n}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi) \text{ так, чтобы } \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} w_{k-2n}(\tau, \varphi) = 0, k \in \mathbb{N}_0.$$

Доказана

Лемма 3. Пусть $f_1(\tau)f_2(\varphi) \in C^\infty(D_0)$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^{2n} z(\tau, \varphi) = f_1(\tau)f_2(\varphi), \quad (\tau, \varphi) \in D_0,$$

имеет единственное решение $z(\tau, \varphi) \in C^\infty(D_0)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ .

В §4.2 доказана

Теорема 9. Пусть выполняется условие U_3 и $n=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sqrt{\varepsilon^k} (q_k(\eta_1, \varphi) + \tilde{q}_k(\eta_2, \varphi)) \right) + \chi(\rho) \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} w_k(\tau, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (8)$$

где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in C^\infty(D_0)$, $q_k \in C^\infty(D_{\eta_1})$, $\tilde{q}_k \in C^\infty(D_{\eta_2})$, $\tau = (\rho - c)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta_1 = (b - \rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta_2 = (\rho - a)/\sqrt{\varepsilon}$, $D_0 = \{(\tau, \varphi): |\tau| < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, $\tilde{q}_k(\eta_2, \varphi) = O(1/e^{\eta_2})$, $q_k(\eta_1, \varphi) = O(1/e^{\eta_1})$, $\eta_{1,2} \rightarrow +\infty$, $w_{4k-2+j}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{2-j})$, $w_{4k+j}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{4-j})$, $j=0, 1$, $|\tau| \rightarrow +\infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Приведен пример 5. Пусть выполняется условие U_3 при $n=1$, $a=1$, $b=3$, $c=2$, $\alpha(\rho, \varphi) \equiv 1$, $f(\rho, \varphi, \varepsilon) = 1$. Тогда $h_0(\rho, \varphi) = 1$, $h_k(\rho, \varphi) = 0$. Доказано, что для решения примера 5 справедливо асимптотическое разложение вида (8).

В § 4.3 методика, разработанная в §4.2, обобщается на случай $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 10. Пусть выполняется условие U_3 . Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение (7), где $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k \in C^\infty(D_0)$, $q_k \in C^\infty(D_{\eta_1})$, $\tilde{q}_k \in C^\infty(D_{\eta_2})$, $\tau = (\rho - c)/\sqrt[2n+2]{\varepsilon}$, $\eta_1 = (b - \rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta_2 = (\rho - a)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{q}_k(\eta_2, \varphi) = O(1/e^{\eta_2})$, $q_k(\eta_1, \varphi) = O(1/e^{\eta_1})$, $\eta_{1,2} \rightarrow +\infty$, $w_{(2n+2)k-2n+j}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{2n-j})$, $j=0, 1, \dots, 2n-1$, $w_{(2n+2)k+s}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{2n+2-s})$, $s=0, 1$, $|\tau| \rightarrow +\infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.

В § 4.4 исследуется задача (1), (2) с условием U_4 . ФАРР ищется в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + \chi(\rho)W(\tau, \varphi, \mu) + \chi_1(\rho)Q(\eta_1, \varphi, \lambda) + \chi_2(\rho)\tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda), \quad (9)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, $W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-2}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $\tau = (\rho - c)/\mu$, $\varepsilon = \mu^4$,

$$Q(\eta_1, \varphi, \lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^k q_k(\eta_1, \varphi), \quad \tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^k \tilde{q}_k(\eta_2, \varphi), \quad \eta_1 = (b - \rho)/\lambda, \quad \eta_2 = (\rho - a)/\lambda,$$

$\varepsilon = \lambda^3$, $\chi(\rho)$, $\chi_{1,2}(\rho)$ – функции сглаживания, $\chi(\rho)$, $\chi_{1,2}(\rho) \in [a, b]$, $\chi, \chi_{1,2} \in C^\infty[a, b]$, $\chi(\rho) = 1$ при $|\rho - c| \leq \delta/3$, $\chi(\rho) = 0$ при $2\delta/3 \leq |\rho - c|$, $\chi_1(\rho) = 1$ при $0 \leq b - \rho \leq \delta/3$, $\chi_1(\rho) = 0$ при $2\delta/3 \leq b - \rho$, $\chi_2(\rho) = 1$ при $0 \leq \rho - a \leq \delta/3$, $\chi_2(\rho) = 0$ при $2\delta/3 \leq \rho - a$, $0 < \delta$ – малое число, независимое от ε .

Из условий (2) следует, что $Q(0, \varphi, \lambda) = -V(b, \varphi, \lambda^3)$, $\tilde{Q}(0, \varphi, \lambda) = -V(a, \varphi, \lambda^3)$.

Подставляя соотношение (9) в уравнение (1), получим

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{V}(\rho, \varphi, \varepsilon) - (b - \rho)(\rho - c)^2(\rho - a)V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D,$$

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{c + \tau \mu} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(c + \tau \mu)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - \\ & - \mu^2 \tau^2 (b - c - \tau \mu)(c - a + \tau \mu)W = h^c(c + \tau \mu, \varphi, \mu^4), (\tau, \varphi) \in D_0, \\ & \lambda \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta_1^2} - \frac{\lambda}{b - \lambda \eta_1} \frac{\partial Q}{\partial \eta_1} + \frac{\lambda^2}{(b - \lambda \eta_1)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right) = h^b(b - \lambda \eta_1, \varphi, \lambda^3) + \\ & + \lambda \eta_1 (b - a - \lambda \eta_1)(b - c - \lambda \eta_1)^2 Q, (\eta_1, \varphi) \in D_{\eta_1}, \\ & \lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \eta_2^2} + \frac{\lambda}{a + \lambda \eta_2} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \eta_2} + \frac{\lambda^2}{(a + \lambda \eta_2)^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \varphi^2} \right) = h^a(a + \lambda \eta_2, \varphi, \lambda^3) + \\ & + \lambda \eta_2 (b - a - \lambda \eta_2)(c - a - \lambda \eta_2)^2 \tilde{Q}, (\eta_2, \varphi) \in D_{\eta_2}, \end{aligned}$$

где $D_0 = \{(\tau, \varphi) \mid |\tau| < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, $W = W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q = Q(\eta_1, \varphi, \lambda)$, $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\eta_2, \varphi, \lambda)$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\rho, \varphi, \varepsilon) = & \chi''(\rho)W(\rho, \varphi, \varepsilon) + \chi'(\rho) \left(2 \frac{\partial W(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\partial \rho} + \frac{W(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\rho} \right) + \chi_1''(\rho)Q(\rho, \varphi, \varepsilon) + \\ & + \chi_1'(\rho) \left(2 \frac{\partial Q(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\partial \rho} + \frac{Q(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\rho} \right) + \chi_2'(\rho) \left(2 \frac{\partial \tilde{Q}(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\partial \rho} + \frac{\tilde{Q}(\rho, \varphi, \varepsilon)}{\rho} \right) + \\ & + \chi_2''(\rho)\tilde{Q}(\rho, \varphi, \varepsilon) =: \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Вспомогательные асимптотические ряды имеют вид

$$h^c(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^3 h_{k,j}^c(\varphi)(\rho - c)^j, \quad h^b(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^3 h_{k,j}^b(\varphi)(\rho - b)^j,$$

$$h^a(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^3 h_{k,j}^a(\varphi)(\rho - a)^j, \quad h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \chi(\rho)h^c + \chi_1(\rho)h^b + \chi_2(\rho)h^a,$$

$$\text{где } h_{k,0}^a(\varphi) = g_k(a, \varphi), \quad h_{k,1}^a(\varphi) = -\sum_{j=1}^3 \tilde{\alpha}_j \tilde{q}_{3k-j,j}(\varphi), \quad h_{k,2}^a(\varphi) = -\sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_{j+1} \tilde{q}_{3k-j,j}(\varphi),$$

$$h_{k,3}^a(\varphi) = -\tilde{\alpha}_3 \tilde{q}_{3k-1,1}(\varphi), \quad h_{k,0}^b(\varphi) = g_k(b, \varphi), \quad h_{k,1}^b(\varphi) = -\sum_{j=1}^3 \alpha_j q_{3k-j,j}(\varphi),$$

$$h_{k,2}^b(\varphi) = -\sum_{j=1}^2 \alpha_{j+1} q_{3k-j,j}(\varphi), \quad h_{k,3}^b(\varphi) = -\alpha_3 q_{3k-1,1}(\varphi), \quad h_{k,0}^c(\varphi) = g_k(c, \varphi),$$

$$h_{k,1}^c(\varphi) = g_{k,1}(c, \varphi), \quad g_{k,1}(c, \varphi) = \frac{\partial g_k(c, \varphi)}{\partial \rho}, \quad h_{k,2}^c(\varphi) = -\beta_1 w_{4k-1,1}(\varphi) - \beta_2 w_{4k-2,2}(\varphi),$$

$$h_{k,3}^b(\varphi) = -\beta_2 w_{4k-1,1}(\varphi), (b-a-\lambda\eta_1)(b-c-\lambda\eta_1)^2 = \sum_{j=0}^3 (\lambda\eta_1)^j \alpha_j, \alpha_0 > 0,$$

$$(b-a-\lambda\eta_2)(a-c+\lambda\eta_2)^2 = \sum_{j=0}^3 (\lambda\eta_2)^j \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_0 > 0, g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi),$$

$$(b-c-\mu\tau)(c-a+\mu\tau) = \sum_{j=0}^2 (\mu\tau)^j \beta_j, \beta_0 > 0.$$

Функции $h_{k,j}^a(\varphi)$, $h_{k,j}^b(\varphi)$, $h_{k,j}^c(\varphi)$ определены так, чтобы выполнялись условия

$$v_k \in C^\infty(\overline{D}), \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} w_{k-2}(\tau, \varphi) = 0, \lim_{\eta_1 \rightarrow +\infty} q_{k-1}(\eta_1, \varphi) = 0, \lim_{\eta_2 \rightarrow +\infty} \tilde{q}_{k-1}(\eta_2, \varphi) = 0.$$

Доказана

Теорема 11. Пусть выполняется условие U_4 . Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение (9), где $v_k \in C^\infty(\overline{D})$,

$$w_k \in C^\infty(D_0), q_k \in E_1^{\eta_1}, \tilde{q}_k \in E_1^{\eta_2}, \tau = (\rho - c)/\sqrt[4]{\varepsilon}, \eta_1 = (b - \rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}, \eta_2 = (\rho - a)/\sqrt[3]{\varepsilon},$$

$$w_{4k-2+j}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{2-j}), w_{4k+j}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{4-j}), j=0, 1, |\tau| \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}_0.$$

Выводы. В диссертационной работе доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца. Обобщенным и классическим методами пограничных функций, также методом малого параметра построены равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца с любой степенью точности. Формальные асимптотические разложения решений задач Дирихле строго обоснованы методом дифференциальных неравенств и принципом максимума. Полученные асимптотические разложения представляют собой ряды Пюизо. Главные члены асимптотических разложений решений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру, что свойственно бисингулярным задачам.

Подробно исследованы случаи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет сингулярность на одной из границ, одновременно на обеих границах, внутри, также одновременно внутри и на обеих границах кольца.

Предлагаемый метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева здесь пограничные функции убывают степенным характером, а не экспоненциально.

Задачи, рассмотренные в диссертации представляют теоретический и практический интерес, а также построение полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач по степеням малого параметра имеет весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев. – Ош: Билим, 2016. – 112 с.
2. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8. – № 2. – С. 52-61.
3. Erkebaev, U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities [Text] / D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev // Ufa Mathematical Journal. Vol. 8. No. 1 (2016). P. 97-107.
4. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
5. Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 42-52.
6. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле с двойной особенностью [Текст] / У.З. Эркебаев // Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. Воронеж. – 2015. – Т. 3. № 8-4(19-4). – С. 344–348.
7. Эркебаев, У.З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 4. вып. 4. – С. 72–75.
8. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для линейного, неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с двумя независимыми переменными, в кольце с потенциалом [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 4. вып. 4. – С. 80–84.
9. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517-525.
10. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение имеет особые точки [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 3(35). – С. 26-34.
11. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 1. – С. 205-212.
12. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с особыми границами [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 1. – С. 213-217.
13. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с особыми граничными линиями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Актуальные вопросы современных математических и естественных наук / Сб. науч.труд. межд. науч. конф. Екатеринбург. – 2015. – № 2. – С. 9-12.
14. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения с регулярной особой линией [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Актуальные вопросы современных математических и естественных наук / Сб. науч.труд. межд. науч. конф. Екатеринбург. – 2015. – № 2. – С. 12-15.
15. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце с особыми границами [Электронный ресурс] / У.З. Эркебаев // Перспективы фундаментальных наук: П 27 сб. трудов XII Межд. конф. студентов и молодых ученых / Томский политех. университет. – Томск: Изд-во ТПУ. 2015. – С. 707-709.

16. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения одной бисингулярно возмущенной задачи Дирихле [Электронный ресурс] / У.З. Эркебаев // Перспективы фундаментальных наук: П 27 сб. трудов XII Межд. конф. студентов и молодых ученых / Томский политех. университет. – Томск: Изд-во ТПУ. 2015. – С. 710-712.
17. Эркебаев, У.З. Асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2014. – № 3. – С. 88-93.
18. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2014. – № 3. – С. 71-78.
19. Эркебаев, У.З. Метод погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Сб. тезисов междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и математического моделирования». – 2015. Алматы, Казахстан. – С. 13-16.
20. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Дирихле с помощью погранфункций [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Междунар. науч. конф. «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ»: Тезисы докладов. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2015. – С. 132.

ЭРКЕБАЕВ У.З. – Спасибо за внимание!

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: – У вас все, Улукбек Зайирбекович? У меня такой вопрос. Чем отличается классическая пограничная функция от обобщенной?

ОТВЕТ: Классическая погранфункция устраняет невязку на границах кольца и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а обобщенная погранфункция устраняет невязку на границах кольца и степенным ростом убывает вне пограничного слоя.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: – В чем состоит основная идея обобщенного метода погранфункций?

ОТВЕТ: Основная идея состоит в том, что нарастающие особенности внешнего разложения решения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения.

СОПУЕВ А.: В чем отличается Ваша работа от работы Д.А. Турсунова?

ОТВЕТ: Впервые идея применения обобщенного метода пограничных функций профессора К. Алымкулова для построения асимптотики решения бисингулярных задач Дирихле изложена в работе Турсунов Д.А. Он исследовал задачу Дирихле для круга и построил только главные члены асимптотики. В моей работе развивается эта идея и задача исследуется в кольце и построены асимптотические разложения с любой степенью точности. Кроме этого доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца, а также в моей работе впервые исследуется случай, когда особая линия находится внутри области, это изложено в гл. 4.

БЕКЕШОВ Т.: Какие методы применены при построении полных асимптотических разложений решений?

ОТВЕТ. При построении асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца использовали обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова, классический метод пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева и метод

малого параметра, кроме этих методов при обосновании асимптотических разложений решений применены принцип максимума и метод дифференциальных неравенств.

АРАПОВ Б.: – Что можете сказать о практических приложениях.

ОТВЕТ: – К задачам Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных непосредственно сводятся: основная задача в гидродинамике – задача обтекания; в теории упругости – задачи кручения и изгиба; в физике – определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре и др. А также построение асимптотических разложений решений бисингулярных задач по степеням малого параметра имеет весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя.

ВЫСТУПИЛИ:

АЛЫМКУЛОВ К. – д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН КР.

– Актуальность темы диссертации Эркебаева У.З. не вызывает сомнения. Автором проделана огромная работа. Исследование обладает внутренним логическим единством полученных результатов. Авторскому замыслу соответствует довольно стройная и продуманная структура исследования: цель, задачи, план, диссертации соответствуют ее основному содержанию. Считаю, что работу У.З. Эркебаева нужно рекомендовать к защите. Диссертационная работа отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК КР к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Алыббаев К.С. – д.ф.-м.н., профессор

– В диссертационной работе Эркебаева У.З. доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца. Обобщенным, классическим методами пограничных функций и методом малого параметра построены полные равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца. Исследованы случаи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет сингулярность на одной из границ, одновременно на обеих границах, внутри, также одновременно внутри и на обеих границах кольца. Формальные асимптотические разложения решений задач Дирихле строго обоснованы двумя методами: методом дифференциальных неравенств и принципом максимума. Полученные асимптотические разложения представляют собой ряды Пуассона и главные члены асимптотических разложений решений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру, что свойственно бисингулярным задачам. Я тоже считаю, что диссертационная работа Эркебаева У.З. отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК КР к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, и рекомендуется к публичной защите на заседании диссертационного совета.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: Теперь переходим к второй части повестки дня, по данной диссертации назначена экспертная комиссия. Для ознакомления с заключением экспертной комиссии слово предоставляется ученому секретарю.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ: читает заключение экспертной комиссии (заключение прилагается).

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: Разрешите ставить на голосование следующие решения. Объявила открытое голосование, по следующему постановлению.

ПОСТАНОВЛЕНИЕ:

1. Допустить к защите диссертацию Эркебаева Улукбека Зайирбековича на тему: «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.
2. Утвердить Заключение экспертной комиссии по рассмотрению диссертационной работы.
3. Утвердить ведущей организацией Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева. Официальных оппонентов д.ф.-м.н., профессора, академика НАН РК Отелбаева Мухтарбайя Отелбаевича, д.ф.-м.н., профессора Байзакова Асана Байзаковича.
4. Разрешить Эркебаеву У.З. выпуск автореферата и публикацию объявления в газете о защите диссертации.
5. Утвердить список лиц и учреждений для дополнительной рассылки автореферата, предложенный экспертной комиссией.
6. Установить дату заседания Диссертационного Совета по защите диссертации Эркебаева Улукбека Зайирбековича на тему: «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 -дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление на 30 июня 2016 года.

Результаты голосования - единогласно «за».

Постановление принято единогласно.

Председатель диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор:

Матиева Г.М.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент:

Бекешов Т.О.

23.05.2016

