Издательский Центр
Научного Просвещения

ISSN 2224-0179

Научно-практический журнал

ПРИВОЛЖСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

№ 5 (57)
май 2016

Издается с сентября 2011 года

Выходит 12 раз в год

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)

НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА
eLIBRARY.RU

Учредитель, издатель: ИП Самохвалов Антон Витальевич
E-mail издательства: icnp@mail.ru
Сайт издательства: icnp.ru, ицнп.рф
Почтовый адрес издательства: 426004, г. Ижевск, ул. Советская, 34, а/я 918
Главный редактор: А.В. Самохвалов
E-mail редакции: pnv-icnp@mail.ru

Изготовлено в типографии "Фаворит"
426039 г. Ижевск, ул. Дзержинского, 77
тел.: 44-55-81, 67-65-48

Формат 60x90 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 20,4.
Подписано в печать: 27.05.2016 г. Тираж: 150 экз. Заказ № 0352.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ И АРХЕОЛОГИЯ

УДК 517.956.6

Т.Ы. Саадалов
старший преподаватель,
кафедра информатики,
Ошский технологический
университет им. М.М. Адышева,
г. Ош, Киргизия
E-mail: saadtol_68@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Аннотация. Доказано существование и единственность решения задачи сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в криволинейном треугольнике с нелокальными условиями сопряжения.

Ключевые слова: задачи сопряжения, псевдопараболические и гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, уравнение Вольтерра.

T.Y. Saadalov, Osh technological university named after M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan

A PROBLEM OF CONJUGATION FOR PSEUDOPARABOLIC-HYPERBOLIC FOURTH ORDER EQUATIONS WITH NONLOCAL CONDITIONS IN A CURVED TRIANGLE

Abstract. The existence and uniqueness of the solution of the conjugation problem for pseudoparabolic and hyperbolic equations in the fourth order in a curved triangle with conjugate conditions were proved.

Keywords: problems of conjugation, pseudoparabolic and hyperbolic equations, fourth order equations, Volterra equations.

1. Введение. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в прямоугольных областях рассмотрены в работах [1; 3]. Такие задачи могут быть математической моделью процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [4; 5]. Однако в приложениях встречаются задачи, когда условия сопряжения содержит интегральные слагаемые или граничные данные задаются на криволинейных участках границы рассматриваемой области. В работе изучена задача сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в криволинейном треугольнике с нелокальными условиями сопряжения.

2. Постановка задачи. Пусть D означает криволинейный треугольник, ограниченный линиями $A_0A_1: x=0, -h_1 \le y \le 0,$, $A_1B: x=\sigma(y), -h_1 \le y \le 0$, $BA_0: y=\mu(x), 0 \le x \le \ell$, а $D_1 = D \cap (y>0)$, $D_2 = D \cap (y<0)$.

Здесь $\sigma(y)$ – монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ – монотонно невозрастающая функции. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r=0,1,\dots,n; s=0,1,\dots,m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} + \\ + b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y), \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \;\; u_x(0,y) = \varphi_2(y), \;\; 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x,\mu(x)) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le \ell, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \alpha_1(x,y)u_{xxx} + \alpha_2(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \\ +\beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = f_2(x,y), \tag{4}$$

граничным условиям

$$u_x(0,y) = \chi_1(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_2(y),\ -h_1 \le y \le 0 \tag{5}$$

$$u(\sigma(y),y) = \chi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0 \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,+0) = \alpha(x)u(x,-0) + \beta(x),\ 0 \le x \le \ell, \\ u_y(x,+0) = \rho(x)u_y(x,-0) + \int_0^x \theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi + r(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i (i=1,2)$, $b_j, \chi_j\ (j=\overline{1,3})$, $d, \alpha, \beta, \delta, \psi, \mu, \sigma, \rho, \theta, r$ – заданные функции, причем для них выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &a_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), a_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1), b_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), \\ &b_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), b_3 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), c_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ &c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\bar{D}_1), \alpha_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \delta \in C(\bar{D}_2), \\ &\alpha_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+2}(D_2), \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \\ &\gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0,h],\ \psi, \mu, \alpha, \beta, \rho, r \in C^2[0,\ell],\ \chi_1, \chi_2, \chi_3, \sigma \in C^1[-h_1,0], \\ &\theta \in C(\bar{Q}) \cap C^{2+1}(Q),\ Q = \{(x,t): 0 < x < \ell, 0 < t < \ell\}, \\ &\forall x \in [0,\ell]: \alpha(x) \ne 0,\ \rho(x) \ne 0,\ \forall x \in [0,\ell]: 0 \le \mu(x) \le h,\ \mu(0) = h,\ \mu(\ell) = 0, \\ &\forall x \in [-h_1,0]: 0 \le \sigma(y) \le \ell,\ \sigma(-h_1) = 0,\ \sigma(0) = \ell,\ h, h_1, \ell > 0, \\ &\varphi_2(0) = \chi_1(0), \psi(\ell) = \chi_3(0),\ \varphi_1(h) = \psi(0). \end{aligned} \tag{9}$$

Задача 1. При $\alpha(x) \equiv 1, \rho(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv \theta(x,t) \equiv r(x) \equiv 0$ рассмотрена в [1], а в случае, когда $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv 0$ – в работе [2]. Особенность данной задачи заключается в том, что краевые условия задаются по всей границе области, поэтому ее можно называть задачей типа задачи Дирихле.

Уравнения (1) и (4) в области D в силу условия сопряжения (7) являются уравнениями смешанного типа [6].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения:

$$u(x,+0) = \tau_1(x),\ u(x,-0) = \tau_2(x),\quad 0 \le x \le \ell, \\ u_y(x,+0) = \nu_1(x),\ u_y(x,-0) = \nu_2(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{10}$$

где $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ – пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (7) получим

$$\tau_1(x) = \alpha(x)\tau_2(x) + \beta(x),\ \nu_1(x) = \rho(x)\nu_2(x) + \int_0^x \theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + r(x). \tag{11}$$

Если удастся определить функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, то решение задачи 1 сводятся к определению решения уравнений (1) и (4) в областях D_1 и D_2 соответственно.

3. Соотношение, принесенное из области D_1. Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0) = \tau_1(x),\quad u_y(x,+0) = \nu_1(x),\ 0 \le x \le \ell. \tag{12}$$

Решение этой задачи с помощью функции Римана имеет следующее представление [1]:

$$u(x,y) = A_1(x,y)\varphi_1(y) - \vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta) -$$
$$-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1''(\xi) - D_1(x,y;\xi)\tau_1''(\xi) +$$
$$+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1'(\xi) - E_1(x,y;\xi)\tau_1'(\xi) + b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1(\xi) -$$
$$-F_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi, \quad (13)$$

где

$$A_1(x,y) = \vartheta_{1\eta\xi}(x,y;0,y) - a_2(0,y)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y),$$
$$B_1(x,y;\eta) = \vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta) + [b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$C_1(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta) -$$
$$-a_2(0,\eta)\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta) + [b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) +$$
$$+[b_2(0,\eta) - a_{1\xi}(0,\eta) - 2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta) +$$
$$+[b_{1\xi}(0,\eta) - a_{1\xi\eta}(0,\eta) - a_{2\eta\eta}(0,\eta) + b_{2\eta}(0,\eta) - c_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$D_1(x,y;\xi) = \vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0) - a_1(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi) = a_2(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0) + [a_{2\eta}(\xi,0) - b_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi) = b_3(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0) + [b_{3\eta}(\xi,0) - c_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана для уравнения (1).

Различные методы построения функции Римана для псевдопараболических уравнений третьего порядка изложены в работах [7]–[9].

Используя условие (3) из (13), получаем интегро-дифференциальное соотношение для функции $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$:

$$\int_0^x [\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1''(\xi) - D_1(x,\mu(x);\xi)\tau_1''(\xi) + a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);$$
$$\xi,0)v_1'(\xi) - E_1(x,\mu(x);\xi)\tau_1'(\xi) + b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1(\xi) -$$
$$-F_1(x,\mu(x);\xi)\tau_1(\xi)]d\xi = \Phi_1(x), \quad (14)$$

где

$$\Phi_1(x) = \psi(x) - A_1(x,\mu(x))\varphi_1(\mu(x)) + \vartheta_\eta(x,\mu(x);0,\mu(x))\varphi_2(\mu(x)) -$$
$$-\int_0^h [B_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^{\mu(x)} \vartheta_1(x,\mu(x);\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (14), учитывая свойства функции $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau_1(0) = \varphi_1(0), \tau_1'(0) = \varphi_2(0), \; v_1(0) = \varphi_1'(0), \; v_1'(0) = \varphi_2'(0),$$

получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau_1(x) - \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)v_1(x) = \int_0^x H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi +$$
$$+\int_0^x H_2(x,\xi)v_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \quad (15)$$

где

$$H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi)-E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi)+F_1(x,\mu(x);\xi),$$
$$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+$$
$$+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$$
$$\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-[\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0)-a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0)+$$
$$+\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0)+[D_{1\xi}(x,\mu(x);0)-E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0)-$$
$$-D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$$

4. Соотношение, принесенное из области D_2. С учетом постановки задачи 1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4) получаем:

$$v_2'''(x)+\alpha_1(x,0)\tau_2'''(x)+\alpha_2(x,0)v_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau_2''(x)+$$
$$+\beta_2(x,0)v_2'(x)+\gamma_1(x,0)\tau_2'(x)+\gamma_2(x,0)v_2(x)+\delta(x,0)\tau_2(x)=f_2(x,0).$$

Интегрируя это уравнение по x в пределах от 0 до x и учитывая условия согласования

$$\tau_2(0)=\frac{\varphi_1(0)-\beta(0)}{\alpha(0)},\ \tau_2'(0)=\chi_1(0),\ \tau_2''(0)=\chi_2(0),$$
$$v_2(0)=\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)},\ v_2'(0)=\chi_1'(0),\ v_2''(0)=\chi_2'(0),$$

имеем

$$v_2(x)=g_1(x)-\alpha_1(x,0)\tau_2(x)+\int_0^x H_3(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi+\int_0^x H_4(x,\xi)v_2(\xi)d\xi, \qquad (16)$$

где

$$H_3(x,\xi)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{1\xi\xi}(\xi,0)+\gamma_{1\xi}(\xi,0)-\delta(\xi,0)]-$$
$$-(x-\xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0)-2\beta_{1\xi}(\xi,0)+\gamma_1(\xi,0)]+3\alpha_{1\xi}(\xi,0)-\beta_1(\xi,0),$$
$$H_4(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{2\xi}(\xi,0)+\gamma_2(\xi,0)]+$$
$$+(x-\xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi,0)-\beta_2(\xi,0)]-\alpha_2(\xi,0),$$
$$g_1(x)=\{\frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)]x^2-[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x+\alpha_1(0,0)\}\varphi_1(0)-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x^2-\alpha_1(0,0)x\}\chi_1(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_2(0)x^2-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0,0)+\beta_2(0,0)]x^2-\alpha_2(0,0)x-1\}\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)}+$$
$$+[\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2+x]\chi_1'(0)+\frac{1}{2}\chi_2'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (16) относительно $v_2(x)$, приходим к следующему соотношению:

$$v_2(x)=g_2(x)-\alpha_1(x,0)\tau_2(x)+\int_0^x H_3^*(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi, \qquad (17)$$

где $H_3^*(x,\xi)=H_3(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)R_1(x,\xi)+\int_\xi^x R_1(x,t)H_3(t,\xi)dt,\ g_2(x)=g_1(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)g_1(\xi)d\xi$, а $R_1(x,\xi)$ – резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

5. Сведение к интегральному уравнению. С учетом (17) из условия сопряжения (11) имеем

$$v_1(x) = g_3(x) - \alpha_1(x,0)\rho(x)\tau_2(x) + \int_0^x K_1(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi, \tag{18}$$

где

$$K_1(x,\xi) = \rho(x)H_3^*(x,\xi) - \theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0) + \int_\xi^x \theta(x,t)H_3^*(t,\xi)dt, \quad g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + r(x) + \int_0^x \theta(x,\xi)g_2(\xi)d\xi.$$

Исключив $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$ из соотношений (15) и (18), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau_2(x) = g(x) + \int_0^x K(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi, \tag{19}$$

где

$$\rho_1(x) = \alpha(x)D_{1\xi}(x,\mu(x);x) + \rho(x)\alpha_1(x,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0),$$
$$K(x,\xi) = \alpha(\xi)H_1(x,\xi) - \rho(\xi)\alpha_1(\xi,0)H_2(x,\xi) +$$
$$+K_1(x,\xi)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0) + \int_\xi^x H_2(x,s)K_1(s,\xi)dt,$$
$$g(x) = \Phi_1(x) - \beta(x)D_{1\xi}(x,\mu(x);x) + \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)g_3(x) +$$
$$+\int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi + \int_0^x H_1(x,\xi)\beta(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0,\ell]: \quad \rho_1(x) \neq 0, \tag{20}$$

то уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение.

При выполнении условия (20) интегральное уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau_2(x)$ из уравнения (19), будем знать и $v_1(x)$ по соотношению (17). Из условия сопряжения (11) определяем $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (13).

6. Решение задачи 1 в области D_2**.** В области D_2 рассмотрим задачу Гурса (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5) и

$$u(x,0) = \tau_2(x), \ 0 \le x \le \ell, \ u(0,y) = \chi(y), \ -h_1 \le x \le 0, \tag{21}$$

где $\chi(y)$ – пока неизвестная функция.

Решение задачи 3 через функции Римана представим в виде [1]

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\tau_2(x) + \int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau_2(\xi)d\xi + \\ &+\int_0^y [\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2(\eta) - B_2(x,y;\eta)\chi_1'(\eta) + \\ &+C_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta) + D_2(x,y;\eta)\chi'(\eta) + E_2(x,y;\eta)\chi(\eta)]d\eta + \\ &+\int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$A_2(x,y;\xi) = \vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0) - \alpha_2(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_2(\xi,0) -$$
$$-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_{2\xi}(\xi,0) - \gamma_2(\xi,0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(x,y;\xi,0),$$
$$B_2(x,y;\eta) = \vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$
$$C_2(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta) + [a_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$

$$D_2(x,y;\eta) = \vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta) - [\alpha_{2\xi}(0,\eta) - \beta_2(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$
$$E_2(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta) + [2\alpha_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\times$$
$$\times\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta) + [\alpha_{1\xi\xi}(0,\eta) - \beta_{1\xi}(0,\eta) + \gamma_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),$$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана для уравнения (4).

Теперь, воспользовавшись условием (6) из (22), имеем

$$\rho_2(y)\chi(y) = T(y) + \int_0^y E(y,\eta)\chi(\eta)d\eta, \tag{23}$$

где

$$E(y,\eta) = D_{2\eta}(\sigma(y),y,\eta) - E_2(\sigma(y),y,\eta),$$
$$T(y) = \chi_3(y) - \vartheta_{2\xi\xi}(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau(\sigma(y)) - \int_0^{\sigma(y)} A_2(\sigma(y),y;\xi)\tau(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^y [\vartheta_2(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2'(y) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2(\eta) - B_2(\sigma(y),y;\eta)\chi_1'(\eta) +$$
$$+C_2(\sigma(y),y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta - \int_0^{\sigma(y)} d\xi \int_0^y \vartheta_2(\sigma(y),y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta.$$

Если

$$\forall y \in [-h_1,0]: \quad \rho_2(y) \neq 0, \tag{24}$$

то уравнение (23) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение.

Пусть выполняется условие (24), тогда интегральное уравнение (23) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Определив отсюда $\chi(y)$ и подставляя ее в (22), получим представление решение задачи 3 и, тем самым, решение задачи 1 в области D_2.

Таким образом, теорема доказана.

Если выполняются условия (8), (9), (20), (24), то решение задачи 1 существует единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (13) и (22) соответственно.

Список литературы:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике // Вестн. Ошс. гос. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2012. – № 3. – С. 114–121.

3. Саадалов Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка // Изв. Том. политехн. ун-та. Математика и механика. Физика. – 2014. – Т. 325, № 2. – С. 22–28.

4. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11–34.

5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

6. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

7. Шхануков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

8. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.

9. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. – Казань: Изд. Казан. мат. общества, 2001. – 226 с.