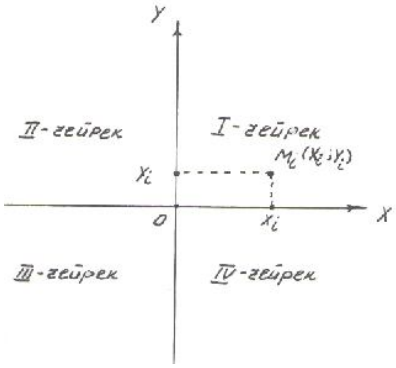
3 – лекция:

Көп өлчөмдүү мейкиндиктердин сандык моделдерин түзүү

1.2.1 Эки өлчөмдүү R^2 мейкиндиги

Ааламдын түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрүн сан огундагы чекиттер деп ойлоп, чекиттерге чыныгы сандарды тиешелеш коюу менен ааламдын сызыктуу бөлүгүнүн сандык модели болгон бир өлчөмүү R^1 мейкиндигин түзүүгө болот. Тегиздиктин бетинде жайгашкан бардык чекиттердин көптүгүн сандар менен белгилеп, аны эки өлчөмдүү мейкиндик деп R^2 көрүнүшүндө жазабыз. Тегиздиктин бетинде жайгашкан чекиттерди бири – биринен айырмалап салыштыруу үчүн, тегиздикте аралыкты ченөө түшүнүгүн киргизебиз. Ал үчүн өз ара перпендикуляр эки *Ox* жана *Oy* сан окторунун жардамы менен түзүлгөн Декарттык координаталар системасы деп аталган аппаратты пайдаланабыз *(1.2.1-чийме).*



	I	II	III	IV
X	+	−	−	+
Y	+	+	−	−

1.2.1-чийме

O - чекити координата башталмасы, *Ox* - абсцисса огу, *Oy* - ордината огу, *Oxy* - координаттык тегиздик деп аталышат. Тегиздикте жайгашкан каалагандай M_i чекитинен координаттык окторго перпендикуляр түшүрүп, аны абсциссасы x_i, ординатасы y_i болгон чекит деп, $M_i(x_i;y_i)$ көрүнүшүндө даректештирип жазабыз. x_i, y_i сандары кадимки эле чыныгы сандар болушуп, M_i чекитинин координаталары деп аталышат. *Ox* жана *Oy* координаттык окторунда континуум кубатындагы чекиттер (сандар) болуп, тегиздиктин бардык чекиттерин белгилөөгө кудурети жетет, же координаттык тегиздиктеги бардык чекиттер менен эки түгөй сандардын арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулат. Тегиздикте эркин кыймылда болгон

М чекитинин тик бурчтуу декарттык координаталарын өзгөрүлмө эки түгөй $(x;y)$ чыныгы сандары менен көрсөтөбүз. Тегиздиктин бетинде жайгашкан өзгөрүлмө М чекиттери координаталары менен М $(x;y)$ көрүнүшүндө жазылып, төмөндө киргизилүүчү аралык эрежесине карата эки өлчөмдүү R^2 мейкиндигин түзөт. Тегиздиктеги чекиттердин координаталары x, y чыныгы сандар болушкандыктан, тегиздиктеги чекиттердин көптүгү да континуум кубатына ээ жана тыгыз, үзгүлтүксүз (жылчыксыз) жайгашат деп эсептейбиз.

Жаратылышта тегиздиктин бетин бойлоп жүрүп жаткандай элестетилген кубулуштарды үйрөнүү үчүн, жалпы учурда тегиздикте кыймылдуу деп эсептелген эки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты ченөө эрежесин же метриканы киргизебиз.

1.2.1 Аныктама. Тегиздикте жайгашкан $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ чекиттеринин арасындагы аралык чени же метрика деп төмөндөгүдөй

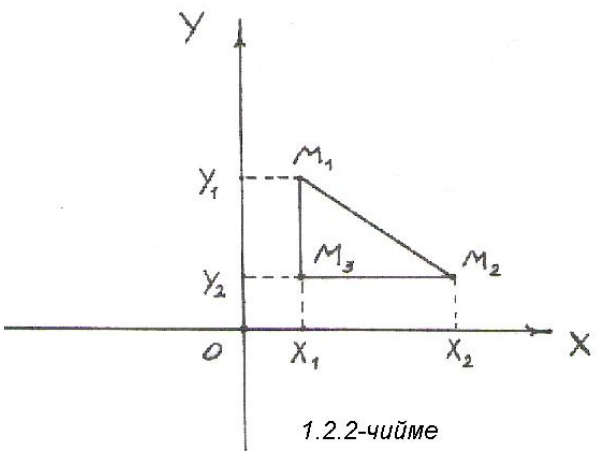
I. $\rho\ (M_1,M_2)=0$ эгерде $M_1=M_2$ чекиттери дал келишсе;

II. $\rho\ (M_1,M_2)=\rho\ (M_2,M_1)$ - симметрия аксиомасы аткарылса;

III. $\rho\ (M_1,M_3)\le\rho\ (M_1,M_2)+\rho\ (M_2,M_3)$ үч бурчтук аксиомасы орун алса, аксиомаларын канааттандырган

$$\rho\ (M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

оң санын түшүнөбүз.



1.2.2-чийме

▹ Аралыкты ченөөчү (1) метрика аппараты I – аксиоманы канааттандырат, анткени (1) дин сол жагы $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ же $M_1=M_2$ шарты аткарылса гана нөлгө барабар болот.

$$(x_1-x_2)^2=(x_2-x_1)^2,$$
$$(y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2$$

болгондуктан, II – симметрия аксиомасы да орун алат. Аралыкты ченөөнүн (1) эрежеси кадимки эле Пифагордун теоремасына окшоп кетет, чынында эле $\Delta M_3M_1M_2$ тик бурчтуу үч бурчтугунун тик чокусун $M_3(x_1; y_2)$ чекити десек *(1.2.2 – чийме)*:

$\Delta M_3M_1M_2$ тик бурчтуу үч бурчтугунда $\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2|$ - гипетенузанын узундугу, , катеттердин узундуктары $|M_3 M_2| = x_2 - x_1$, $|M_3 M_1| = y_1 - y_2$ болушуп, (1) формуласы гипетенузанын узундугунун квадраты катеттердин узундуктарынын квадраттарынын суммасына барабар экендигин ырастайт. “Үч бурчтуктун бир жагынын узундугу калган эки жактарынын узундуктарынын суммасынан ашып кетпейт“ – деген эреже үч бурчтук аксиомасынын тууралыгын көрсөтөрүн байкоого болот. Ошентип R^2 тегиздиги (1) метрикага же ченөө эрежесине карата метрикалык же ченелүүчү мейкиндик болот. ◁

Тегиздикте жайгашкан чекиттердин арасындагы аралыкты (1) эрежесинен башка ченөө эрежелери менен аныктап, R^2 мейкиндигинде чекиттерди салыштыруу, тартиптештирүү аракеттерин жасоого болот. Демек, ченөөнүн же метрикаларды киргизүүнүн көптөгөн эрежелери бар, алардын туура ченөө эрежелери экендигин жогорудагы үч аксиоманы канаатандырарын текшерип көрүп билебиз.

Мисалы: 1. $\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_2|\}$ (2)

эрежеси боюнча M_1 жана M_2 чекиттеринин аралыгын аныктоо, аралык аксиомаларынын шарттарын канааттандырат.

▷ Чынында эле $\rho(M_1, M_2) = 0$ болсо, анда

$\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = 0$ же $\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$ же $\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 \end{cases}$ же $M_1 = M_2$

болот. Ошондой эле $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ симметрия аксиомасы да аткарылат, анткени $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$, $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$ болору белгилүү. Мындан сырткары $M_3(x_3; y_3)$ чекитин алсак

$\rho(M_1, M_3) = \max\{|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|\}$ болуп,

$|x_3 - x_1| \le |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|,$

$|y_3 - y_1| \le |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1|$ барабарсыздыктарынан

$\rho(M_1, M_3) \le \rho(M_3, M_2) + \rho(M_1, M_2)$ үч бурчтук аксиомасынын тууралыгы келип чыгат. ◁

2. R^2 тегиздигинде эки M_1, M_2 чекиттеринин арасындагы аралык деп

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad (3)$$

санын алууга болот.

Аралыкты аныктоонун мырдай эрежеси да метриканын же аралыктын аксиомаларын толук канааттандырат.

Ошентип R^2 тегиздигинде ченөө иштерин аткаруучу метрика эрежелерин ар кандай тандап алуу мүмкүнчүлүгү өзүбүздө болсо да, расмий метрика катарында 1.2.1. аныктамасында баяндалган (1) эрежесин кабыл алабыз. Бирок, метриканы киргизүүнүн башка эрежелери (1) эрежесине каршы келбегендиктен, айрым учурларда аларды аралыктарды баалоо ыкмалары катарында колдоно беребиз. R^2 тегиздигиндеги чекиттердин көптүгүндө (1) аралык эрежеси менен удаалаштык жана анын пределин аныктоо мүмкүн болгондуктан, аны (1) эрежесине карата метрикалык мейкиндик дейбиз.

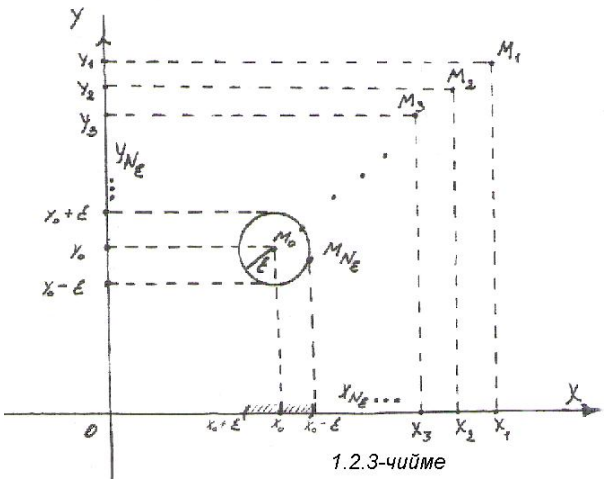
Француз философу жана математиги Р.Декарт киргизген координаталар системасы математикадагы чоң бурулуштардын бири болуп, тегиздиктеги чекиттердин кыймылына салыштырылган кубулуштарды үйрөнүүгө жол ачкан. Ошондой эле геометриялык фигуралар өзүнчө формулалар менен эсептелүүчү турактуу чондуктар сыяктуу гана каралбастан, жалпы алгебранын эрежелери менен эсептелүүчү кыймылдуу өзгөрүлмө чондуктар катарында изилдене баштаган.

1.2.2 R^2 мейкиндигинде пределди түшүндүрүү

R^1 мейкиндигинде сан огундагы ар бир чекит пределдик чекит болгондой эле, R^2 мейкиндигинде координаттык тегиздиктеги ар бир

чекит пределдик чекит боло алат. Аралыктарды ченөө эрежеси боюнча пределдик чекитти аныктайлы. Ал үчүн тегиздиктеги эркин кыймылдуу чекиттерди $M(x;y)$, ал эми кыймылсыз чекитти $M_0(x_0;y_0)$ деп белгилеп туралы.

1.2.2 Аныктама. *Эркин тандалган, жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ саны кандай болгонуна карабастан, тегиздикте $\rho(M_0, M) < \varepsilon$ шартын канааттандыруучу чексиз көп $M(x;y)$ чекиттери болсо, анда $M_0(x_0;y_0)$ - тегиздиктин пределдик чекити деп аталат. Ал эми M чекиттери M_0 чекитинин "ε - аймакчасында" (чеке белинде) жайгашкан деп эсептелет.*



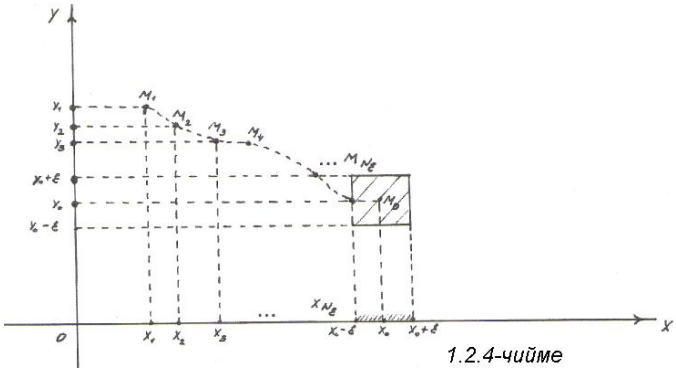
1.2.3-чийме

Чекиттин чеке бели (1) аралык эрежесине ылайык

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

же $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$

барабарсыздыгын канаатандырган $(x;y)$ чекиттеринин көптүгү, же борбору $(x_0;y_0)$ чекити, радиусу ε болгон тегеректин ички чекиттери болушат *(1.2.3-чийме).* Айрым учурларда ченөө эрежеси метриканы $\rho(M, M_0) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}$ көрүнүшүндө тандап, ε - чеке белди $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$ шарттарындагы жактары 2ε болгон квадраттын ички чекиттери деп түшүнөбүз *(1.2.4-чийме).*



1.2.4-чийме

Пределдик чекиттин ε-аймакчасында чексиз көп чекиттердин бар экендигине санап ишенүү макстында, $M(x;y)$ чекитинин координаталарын $\{x_n\}, \{y_n\}$ удаалаштыктары деп алып, пределдик чекиттин

аныктамасын удаалаштыктар тилинде төмөндөгүдөй түшүндүрүүгө болот. Айталы $M_n(x_n;y_n)$ координаталуу чекиттер берилсин дейли.

1.2.3 Аныктама. *Эркибизче жетишерлик кичине деп тандалган* $\varepsilon > 0$ *санына ылайык* N_ε *номери табылып, андан чоң болгон* n *номери* $(n > N_\varepsilon)$ *менен белгиленген* $M_n(x_n;y_n)$ *чекиттери үчүн* $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$ *шарты аткарылса, анда* $\{M_n\}$ *чекиттеринин удаалаштыгын жыйналуучу деп атап,* M_0 *чектүү пределине ээ болот дейбиз.*

Аны $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ (4)

көрүнүшүндө жазып, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0$ деп түшүнөбүз. Бул учурда ченөө метрикасына ылайык $\rho(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$, чексиз кичине чондук болот же $|x_n - x_0| = \alpha_n$, $|y_n - y_0| = \beta_n$ чексиз кичине чондуктар болушат. Ошентип (4) түн аткарылуусунан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, келип чыгат деген жыйынтыкка келебиз. Демек, $\{M_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ удалааштыгы $M_0(x_0, y_0)$ чекитине жыйналышы үчүн $\{x_n\}$ удаалаштыгы x_0 чекитине (санына), $\{y_n\}$ удаалаштыгы y_0 чекитине (санына) жыйналуусу керек жана тескерисинче:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0. \end{cases} \qquad (5)$$

Сан огунда пределге оң жана сол жактардан умтулуу мүмкүн болсо, координаттык тегиздикте M_n удаалаштыктары M_0 чекитинин ε аймакчасына тегиздиктеги каалаган багыт боюнча жакындап келе алат. Жыйналуучу удаалаштыктын чектүү сандагы алгачкы $M_1, M_2, ..., M_{N\varepsilon}$ мүчөлөрү гана M_0 дүн ε аймакчасынын сыртында калып, калган чексиз көп $n > N_\varepsilon$ номерлери менен белгиленген мүчөлөрү ε - аймакчасынын ичинде жайгашат.

Мисалы: $\{M_n\}$ чекиттери координаталары $x_n = \dfrac{3n}{n+1}$, $y_n = \dfrac{2n+1}{n}$ болгон удаалаштыкты түзүшөт ($n \in N$). Бул удаалаштыкка $M_0(3;\,2)$ пределдик чекит болорун далилдегиле.

Далилдөө. ▹ Эркибизче жетишерлик кичине $\varepsilon = 0{,}01$ санын тандап, $\rho\,(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$ шарты $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ жана $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ болгондо аткарыларын байкайбыз. Чынында эле

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$ болот.

Эсептөөдө жеңилдик болсун үчүн $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ санын ордуна андан кичине $\dfrac{\varepsilon}{2}$ санын алып, $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ жана $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ талабын коюу менен $\rho\,(M_n, M_0) < \varepsilon$ шартын аткарылуусун бузбастан, кайра күчөтө алабыз.

Демек, $|x_n - x_0| = \left|\dfrac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|\dfrac{3n - 3n - 3}{n+1}\right| = \left|\dfrac{-3}{n+1}\right| = \dfrac{3}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ же $n + 1 > \dfrac{6}{\varepsilon}$ же $n > \dfrac{6}{\varepsilon} - 1$ болуп, $N_\varepsilon = \dfrac{6}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{6}{0{,}01} - 1 = 600 - 1 = 599$ болот.

Ал эми $|y_n - y_0| = \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\dfrac{2n + 1 - 2n}{n}\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ же $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$ болуп, $N_\varepsilon = \dfrac{2}{\varepsilon} = \dfrac{2}{0{,}01} = 200$ келип чыгат. Жалпы учурда N_ε деп $200,\ 599$ сандарынын чоңун алабыз: $N_\varepsilon = 599.$ Ошентип борбору $M_0(3;\,2)$ - чекити, радиусу $\varepsilon = 0{,}01$ болгон тегеректин сыртында $\{M_n\}$ удаалаштыгынын чектүү 598 сандагы $M_1, M_2, M_3, ..., M_{598}$ мүчөлөрү жайгашып, M_{599} - мүчөсү ε - аймакчасынын чек арасында, калган $M_{600}, M_{601}, M_{602}, ...$ чексиз көп мүчөлөрү ε-аймакча болгон тегеректин ичинде жайгашат. Анда аныктама боюнча $M_0(3;\,2)$ чекити берилген $\{M_n\}$ удаалаштыгынын пределдик чекити болот. Табылган N_ε номери, эркин тандалган $\varepsilon > 0$ санына ылайыкталып, андан көз каранды болот. Эгерде $\varepsilon = 0{,}05$ десек, анда

$\{x_n\}$ үчүн $N_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon} - 1 = \frac{6}{0{,}05} - 1 = \frac{600}{5} - 1 = 119,$

$\{y_n\}$ үчүн $N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{0{,}05} = \frac{200}{5} = 40,$

$\{M_n\}$ үчүн $N_\varepsilon = \max\{119,\ 20\} = 119$ болот.

Бул учурда $M_1, M_2, ..., M_{118}$ мүчөлөрү борбору M_0, радиусу $\varepsilon = 0{,}05$ болгон тегеректин сыртында, M_{119} - мүчө тегеректин чек арасында, калган $n > N_\varepsilon = 119$ номерден башталган M_{120}, M_{121}, M_{122}, ... чексиз көп мүчөлөрү тегеректин ичинде жайгашат.

ε - аймакчасынын сыртында канча M_n мүчөлөрү жайгашканын ырастоочу N_ε номерин табылуусу, M_0 чекитинин ε - аймакчасында чексиз көп M_n мүчөлөрү жайланышканын же M_0 пределдик чекит экенин далилдейт. ◁

1.2.4 Аныктама. *Эгерде* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ *шарты аткарылса, анда* $\{M_n\}$ *чексиз кичине чоңдук, ал эми* $\lim\limits_{n\to\infty} |M_n| = +\infty$ *болсо,* $\{M_n\}$ *чексиз чоң чоңдук деп аталышат.*

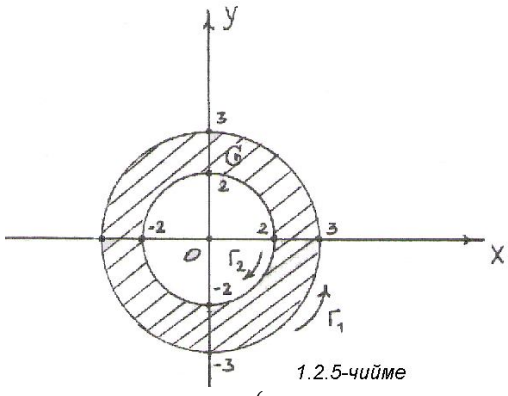
Ошентип $\{M_n\}$ удаалаштыгы координата башталмасы болгон O(0;0) чекитине умтулса, чексиз кичине чоңдук болуп, O чекитине тегиздиктин каалаган тарабынан жакындайт. Демек, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \end{cases}$ болсо, же x_n, y_n чексиз кичине чоңдуктар болушса, анда M_n да чексиз кичине чоңдук болот. Ал эми сан огунда чексиз чоң чоңдуктар эки багыттын (оң, терс) бүтөөр жеринде гана болсо, тегиздиктеги чексиз чоң чоңдуктар чексиз алыстатылган чекиттер деп аталып, координаттык тегиздиктин бардык багыттар боюнча бүтөөр кыйырында жайгашат деп эсептейбиз:

$$\lim_{n\to\infty}|M_n| = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty. \end{cases}$$ Координаталардын бирөөсү чектелбесе эле, $\{M_n\}$ чексиз чоң чоңдук болот. Эгерде пределдик M_0 чекити чексиз алыстатылган чекит болуп калса же аныктоого мүмкүн болбосо, анда $\{M_n\}$ удаалаштыгы таралуучу удаалаштык болот.

Сан огундагы кесиндилерде жайгашкан чекиттердин көптүктөрү сегмент, интервал ж.б. деп аталса, координаттык тегиздиктин бөлүктөрү областтар деп аталышат.

Тегиздиктин кайсы бир бөлүгүндө G областы берилсин деп эсептейли.

1.2.5 Аныктама. *Эгерде A чекитинин ($A \in G$) чексиз кичине ε -чеке белинде G областынын чекиттеринен башка чекиттер жайгашпаса, анда A чекити G областынын ички чекити деп аталат. Ал эми A чекитинин чексиз кичине ε -чеке белинде, G областынан башка областтардын да жок дегенде бир же андан көп чекиттери да жайгашып калса, анда аны чек ара чекити деп айтабыз.*



1.2.5-чийме

Айрым областтар чек ара чекиттерин өздөрүндө кармап тура алышпайт.

Мисалы:

$$G = \{(x;\ y) : 4 < x^2 + y^2 \le 9,\ x \in R \wedge y \in R\}$$

областы борбору $O(0;\ 0)$ чекити, радиусу $r = 3$ болгон тегеректин ички, ал эми борбору $O(0;\ 0)$, радиусу $r = 2$ тегеректин сырткы чекиттери жайгашкан координаттык тегиздиктин бөлүгү болот *(1.2.5 -чийме).*

Шакек сыяктуу G областы ички тараптан чек ара чекиттерин кармап тура албайт. Анткени $x^2 + y^2 = 4$ айланасында жайгашкан чекиттер G областына таандык эмес. Бул айланада жайгашкан чекиттерге, тегиздикте эки тараптан тең тыгыз чекиттер жандашкандыктан, аларга коңшулаш чекиттерди көрсөтө албайбыз. Ошондуктан G областынын

чекиттери менен айтылган айлананын чекиттеринин арасында чексиз көп чекиттер бар деп элестетебиз. Бул учурда G областынан $x^2 + y^2 = 4$ чек арасына чексиз жакындап барган каалаган чекиттердин ε - чеке белинде, G областынын чекиттеринен башка бир да чекит болбогондой кылып $\varepsilon > 0$ санын тандоого болот же алар ички чекиттер гана боло алышат. Бирок, $x^2 + y^2 = 4$ айланасында жайгашкан чекиттер G областына таандык болбогону менен анын чек ара чекиттери болот, анткени ал чекиттердин ар биринин ε - чеке белинде G областынын чекиттери кездешет.

G областынын сырткы тарабында жалаң гана ага таандык чек ара чекиттери жайгашат, анткени $x^2 + y^2 = 9$ айланасынын чекиттери G областына таандык жана областтын эң акыркы чекиттери болушат. $\varepsilon > 0$ санын кандай тандасак да акыркы чекиттердин ε - чеке белинде G областына таандык болбогон чекиттер да жайгашып, $x^2 + y^2 = 9$ айланасындагы бардык чекиттер чек ара чекиттери болушат.

1.2.6 Аныктама. *G областынын бардык чекиттери жалаң гана ички чекиттер болушуп, бир да чек ара чекитине ээ болбосо, анда ал ачык область деп аталат. Ал эми G областынын чек ара чекиттеринин бардыгы G областынын өзүндө кармалып турса, аны туюк (жабык) область дейбиз.*

Сан огунда интервалдар - ачык аралык (көптүк), сегменттер - туюк же жабык аралык (көптүк) болушуп, координаттык тегиздиктеги ачык, жабык областтар алардын аналогдору болушат. Каралган мисалдагы шакек сыяктуу G областы ички тараптан ачык, сырткы тараптан туюк (жабык) болуп, шакекченин сырткы тарабындагы областтар үчүн өзүнүн бардык чек ара чекиттерин кармап турган жабык область, ал эми шакеченин ички тарабындагы областтар үчүн бардык чекиттери ички чекиттер болгон ачык область катары эсептелет.

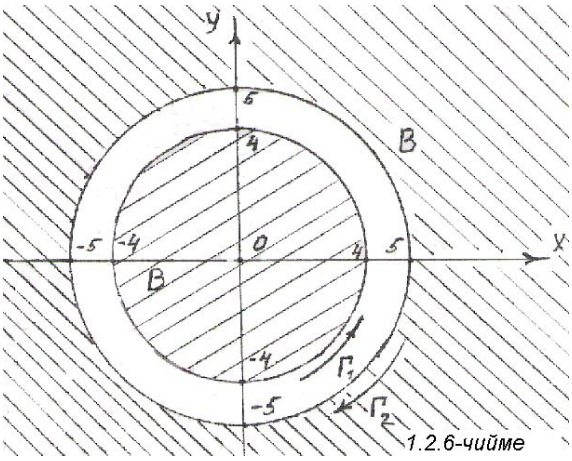
1.2.7 Аныктама. *G областынын каалагандай эки чекитинен бири-бирине G областына таандык болгон чекиттер аркылуу жол жүрүп жетүүгө мүмкүн болсо, анда G областын бир байламталуу область, эгерде мындай мүмкүнчүлүк болбосо көп байламталуу область деп айтабыз.*

Мисалы: $A = \{(x;\ y) : 4 < x^2 + y^2 \le 9, \qquad x \in R, \quad y \in R\}$

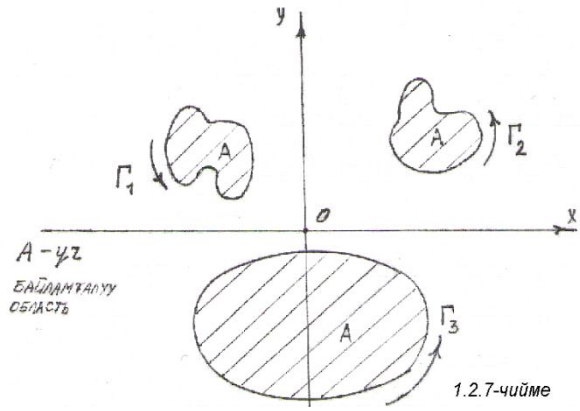
областы (1.2.5 -чийме) бир байламталуу область,

$$B = \left\{(x;\ y) :\ \ x^2 + y^2 \le 16\ \wedge\ x^2 + y^2 \ge 25.\ \ x, y \in R\right\}$$

эки байламталуу область болушат *(1.2.6 - чийме).* 1.2.7- чиймеде үч



1.2.6-чийме



1.2.7-чийме

байламталуу область көрсөтүлгөн.

Областтар чектелген жана чектелбеген болуп экиге бөлүнүшөт. Жогоруда көрсөтүлгөн 1.2.5, 1.2.7 – чиймелеринде чектелген областтар, 1.2.6 –чиймеде чектелбеген область берилген. Чектелген областтын $(x;\ y)$ координаталуу чекиттеринде x, y чыныгы сандары чектүү аралыкта өзгөрүп, чектелбеген областта x, y координаталарынын жок дегенде бири чексиз аралыкта өзгөрө алат. Чектелбеген область ачык деп эсептелет.

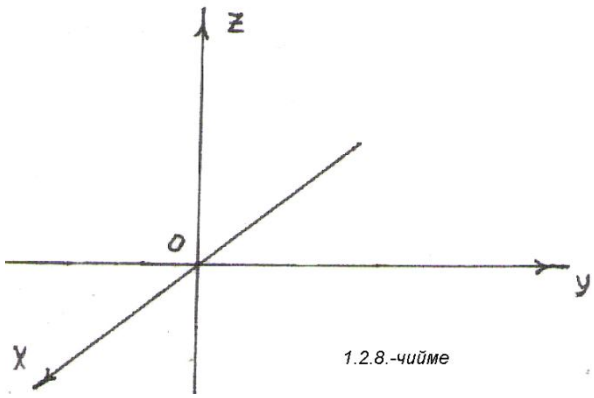
Координаттык тегиздикте жайгашкан областтарды чектеп курчап туруучу ийри сызыктардын багыттары да маниге ээ, алар оң, терс багыттарга бөлүнүшөт.

1.2.8 Аныктама. *G областы туюк* Γ *ийриси менен чектелген дейли.* Γ *ийрисин бойлой жол жүргөн кезде G областы сол жакта кала тургандай багыт - оң багыт деп кабыл алынат, ал эми ага каршы багыт - терс багыт деп эсептелет.*

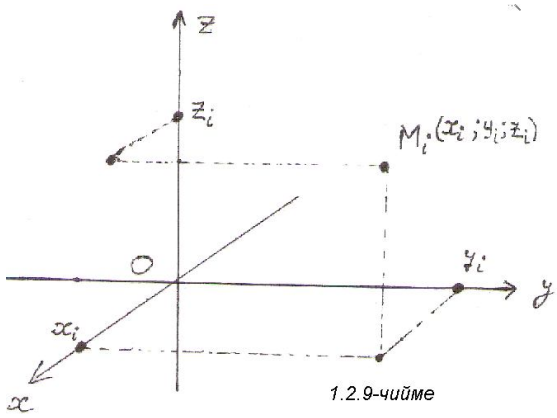
1.2.5 – 1.2.7 – чиймелерде оң багыттар стрелка менен көрсөтүлгөн.

Ошентип R^2 мейкиндигинде сандарды жайгаштыруу тартиби тегиздиктеги декарттык координаталар системасы аркылуу ишке ашырылып, координата башталмасы $O(0;0)$ чекити байкоочу жайгашкан чекит катарында элестетилет. Тегиздиктеги чекиттердин өз ара байланыштары (1) эрежеси менен аныкталган «аралыктарды ченөө» түшүнүгү аркылуу жүргүзүлүп, жаратылышта тегиздиктин бетинде болуп жаткан кубулуштарды жеринде талдап үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк түзөт. Кубулуш жүрүп жаткан чекитке жакындоо ыкмасы предел аппараты менен ишке ашырылып, жакындоо жана алыстоо ылдамдыктары бааланат.

1.2.3 R^3 мейкиндигинде сандарды жайгаштыруу



1.2.8.-чийме



1.2.9-чийме

Аламдын биздин көзүбүзгө көрүнүп, күнүмдүк жашообузду өткөрүп жаткан бөлүгү үч өлчөмдүү R^3 мейкиндиги болуп, бардык нерселер үч өлчөмү: узуну, туурасы, бийиктиги боюнча таанылып, сезимибизде кабыл алынат.

Үч өлчөмдүү мейкиндикти математиканын тилинде түшүндүрүү үчүн мейкиндиктин кайсы бир жеринен О чекитин тандайбыз, аны байкоочу турган чекит дейбиз. О чекитинде кесилишүүчү өз ара перпендикуляр Ox, Oy, Oz сан окторун тургузабыз *(1.2.8 – чийме).* Натыйжада, О чекитинде туруп алып, үч өлчөмдүү мейкиндикке байкоо жүргүзүүгө ылайыкташкан тик бурчтуу декарттык координаталар системасы деп аталган аппаратты түзөбүз. О чекити координаталар башталмасы, Ox абцисса огу, Oy ордината огу, Oz аппликата огу деп айырмаланып аталып, жалпы учурда тик бурчтуу

$Oxyz$ декарттык координаталар системасында Ox, Oy, Oz координаттык октор, Oxy, Oyz, Oxz координаттык тегиздиктер деп айтылышат. Координаттык тегизиздиктер мейкиндикти 8 октанттарга же бөлүктөргө бөлүп турат.

Үч өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан каалагандай M_i чекитинин, берилген $Oxyz$ декарттык системасына карата үч координаталары болот. Бул координаталарды табуу үчүн, M_i чекитинен Ox, Oy, Oz координаттык окторуна перпендикуляр кесүүчү тегиздиктерин жүргүзөбүз. Тегиздиктердин координаттык октор менен кесилишүү чекиттери болушкан x_i, y_i, z_i чыныгы сандары, M_i чекитинин координаталары деп аталышат *(1.2.9 – чийме).* O чекитин координаталары менен $O(0;\ 0;\ 0)$, ал эми M_i чекитин $M_i\ (x_i;\ y_i; z_i)$ көрүнүштөрүндө даректештирип жазабыз.

Ox, Oy, Oz координаттык октору чыныгы сандардын мейкиндиктерин сүрөттөшкөн сызыктуу сан октору болушкандыктан, аларда континуум кубатындагы чыныгы сандар болуп, үч өлчөмдүү R^3 мейкиндигинде жайгашкан бардык чекиттерге координаталар болуучу сандар жетиштүү. Ошондуктан R^3 мейкиндигин толтуруп турган чекиттер да тыгыз жана жылчыксыз же коңшу чекиттерди көрсөтүүгө мүмкүн эмес деңгээлде үзгүлтүксүз жайгашкан деп эсептелет. Ошентип тик бурчтуу декарттык координаталар системасы менен, R^3 мейкиндигинин чекиттеринде болуп жаткан кубулуштарды сандык жактан бир маанилүү мүнөздөө мүмкүнчүлүгү жаралат. Анткени R^3 мейкиндигиндеги ар бир чекиттин өзүнүн гана дарегин көрсөтүүчү координаталары бар, же $(x; y; z)$ чыныгы сандарынын үчтүгүнө R^3 мейкиндигинен бир гана M чекити, бир маанилүү тиешелеш коюлат жана тескерисинче. Жалпы учурда R^3 мейкиндигинде эркин кыймылдап жүрүүчү чекитти $M(x;\ y;\ z)$ деп белгилеп, R^3 төө метрика же аралык эрежесин киргизебиз.

1.2.9 Аныктама. *R^3 мейкиндигиде жайгашкан каалагандай эки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ жана $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ чекиттеринин арасындагы аралыктын чени же метрика деп метриканын үч аксиомаларын тең канааттандырган*

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}^{\,2} \qquad (6)$$

чыныгы санын түшүнөбүз.

Аралыкты ченөөнүн киргизилген (6) эрежеси метриканын I, II, III аксиомаларын канааттандырарын R^2 мейкиндигиндеги (1) эрежесин текшерген сыяктуу жүргүзүүгө болот. Ошондуктан R^3 түү, (6) аралыкты ченөө эрежесине карата метрикалык (ченелүүчү) мейкиндик деп эсептейбиз. M_1 жана M_2 чекиттеринин арасындагы аралыкты кырларынын узундугу $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$ сандары болгон параллелепипеддин диагоналынын узундугуна салыштырса болот *(1.2.10-чийме).* Чынында эле тик бурчтуу параллелепипеддин кырларынын квадраттарынын суммасы, анын чоң диагоналынын квадратына барабар: $|M_1 M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ же

$$\rho(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

R^2 мейкиндигиндей эле, R^3 мейкиндигинде да аралыкты ченөө эрежесин башка ыкмалар менен тандап, чекиттердин жайгашуу жана кыймылдоо тартибин аныктоого болот.

Мисалы: 1. R^3 мейкиндигиндеги чекиттердин көптүгү

$$\rho(M_1, M_2) = \max\left\{|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|,\ |z_2 - z_1|\ \right\} \qquad (7)$$

эрежеси менен аныкталган метрикага карата мейкиндик болот.

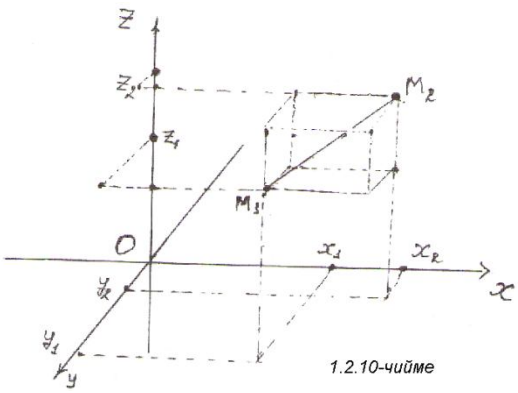
(7) эрежесин аралыктын үч аксиомасын тең канааттандырары, (2) эреженин метрика экенин далилдөө сыяктуу эле жүргүзүлөт. Бул учурда M_1 жана M_2 чекиттеринин арасындагы аралык деп, алардын тиешелүү координаталарынын арасындагы аралыктардын арасынан эң чоңу болгон чыныгы сан тандалат.

2. $\rho\ (M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|$ (8)

эрежесин R^3 мейкиндигинде метрика катарында алууга болобу?

Жооп: Суроого жооп берүү үчүн аралыктарды ченөөнүн (8) эрежеси метриканын үч аксиомасын тең канааттандырарын көрсөтөлү:

▹ I. $\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$.



1.2.10-чийме

Чынында эле $\rho\ (M_1, M_2)$ саны (8) эрежесине ылайык үч оң сандардын суммасына барабар жана ар бир кошулуучулар нөлгө барабар болсо гана нөлгө тең болот. Демек,

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| = 0, \\ |y_2 - y_1| = 0, \\ |z_2 - z_1| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1, \end{cases} \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

II. $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ аксиомасын текшерели:

Метрика деп алынган $\rho(M_1, M_2)$ саны (8) эреже менен аныкталгандыктан, үч кошулуучуда тең

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |x_1 - x_2| \\ |y_2 - y_1| &= |y_1 - y_2| \\ |z_2 = z_1| &= |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

барабардыктары орун алат же II – аксиома аткарылат.

III. $\rho\ (M_1, M_3) \le \rho\ (M_1, M_2) + \rho\ (M_2, M_3)$ үч бурчтук аксиомасын текшерели. Аны $M_1(x_1, y_2, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ чекиттерине карата абсолюттук чоңдуктун касиетин пайдаланып көрсөтөбүз:

$$\rho(M_1,M_3)\overset{(8)}{=}|x_3-x_1|+|y_3-y_1|+|z_3-z_1|=|x_3-x_2+x_2-x_1|+$$
$$+|y_3-y_2+y_2-y_1|+|z_3-z_2+z_2-z_1|\le$$
$$\le|x_3-x_2|+|x_2-x_1|+|y_3-y_2|+|y_2-y_1|+|z_3-z_2|+|z_2-z_1|=\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3).$$

Ошентип R^3 төө жайгашкан чекиттердин көптүгү тандалган (6), (7), (8) метрика эрежелеринин баарына карата метрикалык мейкиндик болот. Анткени ушул аралыкты ченөө эрежелери менен R^3 төө удаалаштык жана анын пределдик чекиттер түшүнүгүн киргизүүгө болот. Бул эрежелер бири – бирине каршы келбегени менен ченөө тактыктары боюнча айырмаланышат, ошондуктан айрым жакындаштырылган аралыктарды баалоодо гана (7), (8) эрежелерди пайдаланып, негизинен R^3 төгү метрика деп (6) эрежеси кабыл алынган.◁

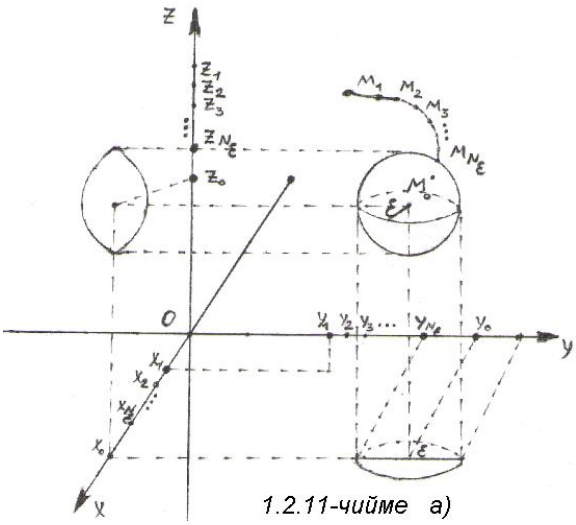
1.2.4 R^3 мейкиндигиндеги удаалаштыктардын пределдери

R^3 мейкиндигинин элементтери болгон $M_0(x_0,y_0,z_0)$ чекиттеринин ар бири пределдик чекит боло алат, анткени каалаган үч өлчөмдүү чекиттин чексиз кичине ε - аймакчасында чексиз көп үч өлчөмдүү чекиттер жайгашкан болот.

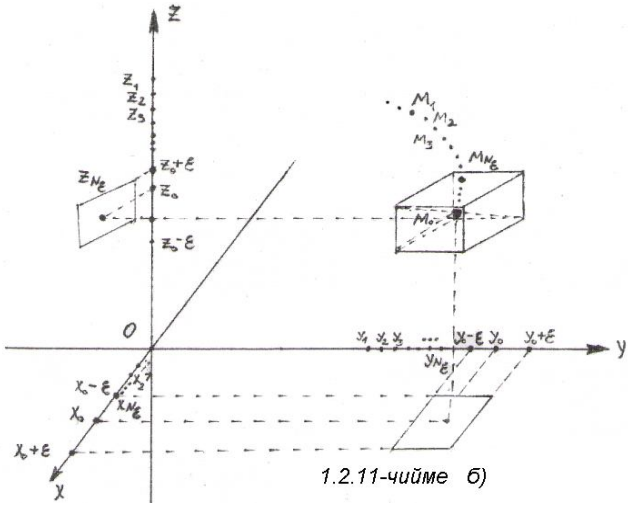
1.2.10 Аныктама. *Эркин тандалуучу жетишерлик кичине деп эсептелген каалагандай $\varepsilon>0$ санына жараша, $\rho(M_0,M)<\varepsilon$ шартын канааттандыруучу бардык $M(x;y;z)$ чекиттеринин көптүгү M_0 чекитинин ε - аймакчасы (чеке бели) деп аталат.*

R^1 сан огунда M_0 чекитинин ε - аймакчасы деп $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ жетишерлик кичине интервал алынса, R^2 координаттык тегиздигинде тандалган ченөө эрежелерине жараша борбору M_0, радиусу $r=\varepsilon$ болгон тегеректин ички чекиттеринин көптүгү же диагоналдарынын кесилишинде M_0 чекити турган, жактары 2ε болгон квадраттын ички чекиттери эсептелет. R^3 мейкиндигинде M_0 чекитинин ε - аймакчасы болуп, (6) ченөө метрикасына ылайык борбору M_0 чекити, радиусу $r=\varepsilon$ болгон шардын ички чекиттери болот. Ал эми (7) ченөө

эрежесине (метрикага) карата чоң диагоналдарынын кесилишинде M_0 чекити турган, кырларынын узундугу 2ε болгон кубдун ички чекиттери катарында түшүнөбүз. ε - аймакча ачык область болуп, чек ара чекиттерин кармабайт *(1.2.11-чийме).*



1.2.11-чийме а)



1.2.11-чийме б)

ε - аймакчанын Oxy, Oyz, Oxz координаттык тегиздиктердеги проекциялары тандалган метрикаларга жараша тегерекчелер же квадратчалар болушат.

1.2.11 Аныктама. *R^3 мейкиндигинде координаталары менен*

$$M_1(x_1;y_1;z_1),\quad M_2(x_2;y_2;z_2),\quad M_3(x_3;y_3;z_3),\ ...,\ M_n(x_n;y_n;z_n),\ ... \qquad (9)$$

удаалаштыгы берилсин дейли.

Эгерде жетишерлик кичине деп эсептелген $\varepsilon > 0$ санын кандай тандап алганыбызга карабастан, ага ылайык N_ε номери табылып, $n > N_\varepsilon$ номерлери менен белгиленген бардык M_n мүчөлөрү үчүн $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ шарты аткарылса, анда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити берилген (9) удаалаштыгынын предели деп аталып,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \qquad (10)$$

көрүнүшүндө жазылат. Пределдик M_0 чекитинин координаталары чектүү сандар болсо, (9) удаалаштыгы жыйналуучу, ал эми M_0 чекити

чексиз алыстатылган же аныктоого мүмкүн болбогон чекит болсо, таралуучу деп аталат.

Иш жүзүндө (10) барабардыгы аткарылышы үчүн, бир учурда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad (11)$$

пределдеринин бардыгы аткарылышы керек. Аралыктардын тилиндеги эреже боюнча (10) пределин: (9) удаалаштыгынын чектүү N_ε сандагы $M_1, M_2, ..., M_{N_\varepsilon - 1}$ мүчөлөрү гана M_0 чекитинин ε - аймакчасынын сыртында калып, N_ε - мүчөсү болгон M_{N_ε} чекити чек арада жайгашып, калган чексиз көп $M_{N_\varepsilon+1}, M_{N_\varepsilon+2}, ..., M_n, ...$ мүчөлөрү ε - аймакчанын ичинде жайгашат деп түшүнөбүз.

Мисалы: $\left\{M_n\left(\frac{1}{3n}; \frac{5n}{n+1}; \frac{-n}{4n+1}\right)\right\}$ удаалаштыгынын пределдик чекити (жеткен жери) $M_0\left(0;\, 5;\, -\frac{1}{4}\right)$ чекити болоорун далилдегиле.

Далилдөө: ▷ $x_n = \frac{1}{3n}$, $y_n = \frac{5n}{n+1}$, $z_n = \frac{-n}{4n+1}$ болгондуктан, (11) талабы боюнча $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} = 5$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{4n+1} = -\frac{1}{4}$ ээ болуп, $M_0\left(0;\, 5;\, -\frac{1}{4}\right)$ чекитинин берилген удаалаштыкка пределдик чекит экендигине ишенебиз.

Ушул эле далилдөөнү аралыктарды баалоо тилинде текшерип көрөлү. Жетишерлик кичине деп ойлоп $\varepsilon = 0{,}001$ санын алалы. Анда

$$\rho(M_n, M_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{3n} - 0\right)^2 + \left(\frac{5n}{n+1} - 5\right)^2 + \left(\frac{-n}{4n+1} + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3n}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{4n+1}\right)^2}$$

келип чыгат. $\max\limits_{n\in N}\left\{\frac{1}{3n}, \frac{5}{n+1}, \frac{1}{4n+1}\right\} = \frac{5}{n+1}$ болгондуктан, адегенде

кошулуучулардын ар бирин чоңураак $\frac{5}{n+1}$ саны менен алмаштырып, андан кийин $\sqrt{3}$ санын андан чоң 2 саны менен алмаштырсак,

$$\rho(M_n, M_0) \le \sqrt{\left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{5}{n+1} < 2 \cdot \frac{5}{n+1} = \frac{10}{n+1} < \varepsilon$$ же

$n+1 > \frac{10}{\varepsilon}$ же $n > \frac{10}{\varepsilon} - 1$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Демек, $N_\varepsilon = \left[\frac{10}{\varepsilon} - 1\right]$ (бүтүн бөлүгү) деп алууга болот. $\varepsilon = 0{,}001$ болсо, $N_\varepsilon = \left[\frac{10}{0{,}001} - 1\right] = [9999] = 9999$ болот. Ошентип берилген удаалаштыктын алгачкы чектүү сандагы 9998 мүчөлөрү $M_0\left(0;\, 5;\, -\frac{1}{4}\right)$ чекитинин $\varepsilon = 0{,}001$ - аймакчасын сыртында, 9999 - мүчөсү 0,001 - аймакчасынын чек арасында, калган чексиз көп $n > 9999$ номерлүү

$$M_{1000},\ M_{1001},\ M_{1002},\ \ldots,\ M_n,\ \ldots$$

мүчөлөрү 0,001 - аймакчасынын ичинде жайгашкан болот. Бул M_0 чекитинин пределдик чекит болорун далилдейт.

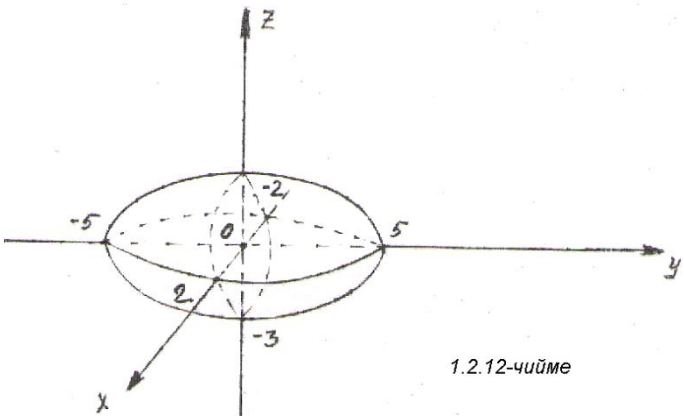
Табылган N_ε номери ε го ылайыкташып, андан көз каранды болот. Маселен, $\varepsilon = 0{,}1$ десек $N_\varepsilon = 99$ келип чыгат, ошондуктан табылган номерди жазууда ε санын индекс катарында көрсөтүп жазышат. ◁

R^3 мейкиндигинде $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ же $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ шарты аткарылса, анда $\{M_n\}$ чексиз кичине чоңдук деп аталат. Ошентип $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ бардыгы чексиз кичине чоңдук болушса гана, $\{M_n\}$ чексиз кичине болот же $O(0;0;0)$ координата башталмасына чексиз жакындайт. Ал эми R^3 мейкиндигинде чексиз чоң чоңдук болуу үчүн координаталарынын бирөөсүнүн чексиз чоң чоңдук болушу жетиштүү. Чексиз чоң чоңдуктар - чексиз алыстатылган чекиттер катарында эсептелип, R^3 мейкиндигинин бүтөөр кыйырларында жайгашкан деп элестетилет:

$$\lim_{n\to\infty}|M_n| = +\infty \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}|x_n| = +\infty \text{ же } \lim_{n\to\infty}|y_n| = +\infty \text{ же } \lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty .$$

R^1 мейкиндигинде областтар түз сызыктын кесиндилери, R^2 де жалпак фигуралар болушса, R^3 мейкиндигинде үч өлчөмдүү телолор катарында сүрөттөлүшөт.

R^3 мейкиндигиндеги областтын бардык чекиттеринин үч координаталары тең чектүү сандар болушса, анда чектүү область, жок дегенде бир координатасы чектелбесе эле, чектелбеген область деп эсептейбиз.



1.2.12-чийме

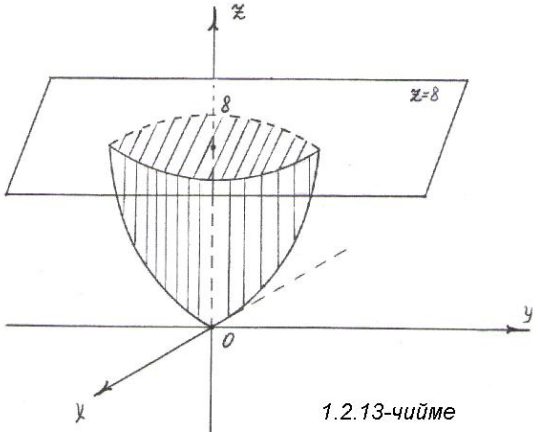
R^3 мейкиндигинде да

(1.2.5), (1.2.6) –

аныктамаларынын шарттарында ачык, туюк областтар жайгашып, алардын чек арасы же кабыгы катарында беттер эсептелишет. Ошондой эле бир жана көп байламталуу областтар кездешет.

Мисалы:

1. $G = \left\{ (x, y, z) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} \le 1;\ x, y, z \in R \right\}$ областы *1.2.12-чиймеде* көрүнгөндөй эллипсоиддин ички чекиттери, ал эми анын чек арасы же кабыгы эллипсоиддин чекиттеринен турат.



1.2.13-чийме

2. $Q=\{(x,y,z): z\le x^2+y^2, 0\le z\le 8;\ x,y,\in R\}$ областы жогору жагынан $z=8$ тегиздиги менен чектелген параболоиддин ички чекиттери болот *(1.2.13-чийме).* Чек арасы (кабыгы) болуп, параболоиддин жана $z=8$ тегиздигинин $x^2+y^2=8$ шартын канааттандыруучу чекиттер эсептелишет. Жалпы учурда $R^1\subset R^2\subset R^3$ болуп, сан огу жана координаттык тегиздик R^3 -мейкиндигинде жайгашкан чекиттерден куралгандыктан, кесиндилерди жана жалпак фигураларды да R^3 мейкиндигиндеги областтар деп эсептөөгө болот. Ошентип, декарттык координаталар системасы менен R^3 мейкиндигинде үч өлчөмдүү телолордун жайгашуу абалдарына, кыймылдарына салыштырып, реалдуу жаратылыш мейкиндигиндеги өзгөрүүчү бардык кубулуштарды сандык жактан мүнөздөө мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

1.2.5 R^n мейкиндигинин сандык моделин түзүү

Реалдуу турмушта үч өлчөмдүү мейкиндиктен жогорку өлчөмдүү мейкиндиктерди тикелей таанып үйрөнүүгө мүмкүнчүлүгүбүз жок. Ошондой болсо да R^1, R^2, R^3 мейкиндиктерине аналогиялуу көрүнүштө R^n мейкиндигин сандар менен толтурууга же моделдештирүүгө болот. Ал үчүн байкоочу жайгашкан О чекитин тандап, ага карата n өлчөмдүү тик бурчтуу декарттык координаталар системасын түзөбүз. Ал үчүн кыялыбызда өз ара перпендикуляр деп эсептелген, О чекитинде кесилишкен n сандагы $Ox_1, Ox_2, Ox_3,...,Ox_n$ сан окторун R^n мейкиндигинде жайгаштырабыз. Түзүлгөн системаны борбору О чекити болгон n өлчөмдүү тик бурчтуу декарттык координаталар системасы деп, ал эми $Ox_1, Ox_2, Ox_3,...,Ox_n$ сан окторун координаттык октор дейбиз. Бул координаттык окторго карата R^n мейкиндигинин ар бир чекити n координаталарга ээ болушат. Ыңгайлуулук үчүн R^n дин чекиттерин

$x,\ y,\ \ldots$ сыяктуу тамгалар менен белгилеп, аларды координаталары менен $x(x_1;x_2;\ x_3;\ldots;x_n)$, $y(y_1;\ y_2;\ y_3;\ldots;y_n)$, $z(z_1;z_2;z_3;\ldots;z_n)$, ... көрүнүшүндө жазуу эрежесин кабыл алабыз. Кээде чекиттин координаталарын $x=\{x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n\}$ көрүнүшүндө да жазууга болот. Мисалы, R^2, R^3 мейкиндиктеринде $x\in R^3$ болсо $x(x_1;\ x_2;x_3)$; $x\in R^2$ болсо $x(x_1;x_2)$ координаталары менен жазылышат.

1.2.12 Аныктама. *R^n мейкиндигинде жайгашкан $x=\{x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n\}$ жана $y=\{y_1;y_2;y_3;\ldots;y_n\}$ чекиттеринин арасындагы аралыктын чени же метрика деп, үч аралык аксиомаларын канааттандырган*

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \qquad (12)$$

чыныгы санын түшүнөбүз.

R^n мейкиндиги (12) эрежеси метрикага карата ченелүүчү же метрикалык мейкиндик болот, анткени (12) эрежеси метриканын бардык аксиомаларын канааттандырат.

▹ I – аксиоманы текшерүү:

(12) барабардыгынын оң жагы жалаң оң сандардын суммасынан тургандыктан, $\rho\ (x,y)=0$ шарты бардык оң кошулуучулар нөлгө барабар болгондо гана аткарылат:

$(y_k-x_k)^2=0$ же $y_k=x_k$, $k=1,2,\ldots,n$ же $x=y$.

II – аксиоманы текшерүү:

$\rho\ (x,y)=\rho\ (y,x)$ болот, анткени $(y_k-x_k)^2=(x_k-y_k)^2$ барабардыгы орун алат.

III –аксиоманы текшерүү:

$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ үч бурчтук аксиомасы

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2} \qquad (13)$$

көрүнүшүндө жазылып, R^2, R^3 мейкиндиктериндеги үч бурчтук аксиомаларын жалпылап турат. $y_k - x_k = a_k$ жана

$z_k - y_k = b_k$, $z_k - x_k = a_k + b_k$ белгилөөлөрүнүн жардамы менен (13) барабарсыздыгын

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad (14)$$

көрүнүшүндө жазабыз. Бул барабарсыздыктын тууралыгы **Коши – Буняковскийдин** барабарсыздыгы деп аталган

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad (15)$$

барабарсыздыгын пайдаланып, (14) тү өзгөртүп түзүү менен көрсөтүлөт. Коши – Буняковскийдин (15) барабарсыздыгынын тууралыгы

$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2$ теңдештигинен терс экинчи кошулуучуну таштап жибергенден келип чыгат (теңдештик мат. индукция усулу менен далилденет). Ал эми

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \overset{(15)}{\le} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2$$

болгондуктан, (14) барабарсыздыгынын тууралыгына же үч бурчтук аксиомасынын аткарылышына ишенебиз. ◁

Аралыкты ченөө эрежеси болгон (12) метрикасын башка усулдар менен аныктап, R^n мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди тартиптештирип, чекиттердин аралыгын жана жакындоо, алыстоо абалдарын үйрөнүүгө болот. Мисалы, $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$, $\rho_2(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |y_k - x_k|$ сандарын да x жана y чекиттерин арасындагы

аралык же метрика деп, R^n мейкиндигин ушул аралык эрежелерине карата ченелүүчү же метрикалык мейкиндик деп эсептөөгө болот.

R^n мейкиндигинде кабыл алынган (12) метрикасына таянып, $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\}$ чекитинин чеке бели же ε - аймакчасы катары $\rho(x^0, x) < \varepsilon$ шартын канааттандыруучу $x(x_1; x_2; ...; x_n)$ чекиттеринин көптүгүн түшүнөбүз. R^n мейкиндигиндеги чекиттердин

$$x^1, x^2, x^3, ..., x^k, ...$$

удаалаштыгы координаталары боюнча ар түрдүү n сызыктуу

$$\begin{cases} x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^k, ..., \\ x_2^1, x_2^2, x_2^3, ..., x_2^k, ..., \\ x_3^1, x_3^2, x_3^3, ..., x_3^k, ..., \\ ---------- \\ x_n^1, x_n^2, x_n^3, ..., x_n^k, ... \end{cases}$$

удаалаштыктардын системасын түзүшөт. Ошентип $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$ предели, бир өлчөмдүү R^1 мейкиндигиндеги кадимки n удаалаштыктардын системасынын пределдик маанилери менен аныкталат, б.а.:

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = x_1^0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_2^k = x_2^0, \\ ------- \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k = x_n^0. \end{cases} \qquad (16)$$

Ошондуктан R^n мейкиндигиндеги удаалаштыктар R^1 мейкиндигиндеги удаалаштыктардын жана алардын пределдеринин бардык касиеттерине баш ийет. $n = 3$ болсо, (16) пределдери (11) пределдердин көрүнүшүндө жазылышат.

R^n мейкиндигинде жайгашкан ар бир чекит пределдик чекит болот, аны ε - аймакча алуу менен аралыктар тилинде көрсөтүүгө

болот. Мындан сырткары R^n мейкиндигиндеги областтарды n өлчөмдүү телолор деп, аларды да ачык жана туюк областарга бөлүп карайбыз. Эгерде $x \in R^n$ чекитинин жок дегенде бир координатасы чексиз чоң болсо, анда аны чексиз чоң чоңдук же чексиз алыстатылган чекит, ал эми бардык координаталары «ЧК» болсо, аны чексиз кичине чоңдук деп түшүнөбүз.

Көп адабияттарда R^n мейкиндигин (12) метрикасына карата арифметикалык мейкиндик деп аташат. Ошентип R^n бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык мейкиндик болот.